गणित

मिडिल स्कूलों के लिए

पुस्तक III भाग II

कक्षा VIII के लिए पाठ्यपुस्तक

एस० डी० चोपड़ा   के० सी० मदान

सम्पादक
राजेन्द्र पी० गुप्त
महेन्द्र शंकर

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
मई 1980 : वैशाख 1902

पुनर्मुद्रण
फरवरी 1981 : माघ 1902
मार्च 1983 : चैत्र 1905
मार्च 1986 : चैत्र 1908
फरवरी 1988 : माघ 1909

P.D. 5 T-SDS

मूल्य 5.45

प्रकाशन विभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा मधु प्रिंटर्स, B-62/4, नारायणा इण्डस्ट्रियल एरिया, फेज II, नई दिल्ली 110028 में मुद्रित।

प्राक्कथन

यह पुस्तक "मिडिल स्कूलों के लिए गणित" पुस्तकमाला के अंतर्गत पुस्तक III का भाग II है। इस पुस्तक की विचारधारा और शैली वही है जो पुस्तक I, II तथा III के भाग I में अपनाई गई थी। इसमें वास्तविक जीवन की स्थितियों को मूर्त रूप करने में सहजज्ञान और पर्यवेक्षण के प्रयोग पर बल दिया गया है तथा गणित को एक सरल और सुन्दर ढंग से प्रस्तुत किया गया है।

इस पुस्तक का प्रथम प्रारूप कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय के गणित विभाग के (अवकाश प्राप्त) वरिष्ठ प्रोफेसर और अध्यक्ष प्रो० एस० डी० चोपड़ा तथा विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के डा० के० सी० मदान द्वारा तैयार किया गया। फिर इस प्रारूप का राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उदयपुर में आयोजित एक कार्यशिविर में गणित शिक्षकों और विषय-विशेषज्ञों के एक समूह द्वारा समीक्षात्मक विवेचन किया गया। उनके सुझावों और टिप्पणियों के आधार पर पुस्तक का अंतिम लेखन और विषय-संपादन का कार्य विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के डा० आर० पी० गुप्ता और श्री महेन्द्र शंकर द्वारा किया गया। इसी विभाग के श्री आर० एस० कोठारी और डा० आत्मा राम साहू का विशेषतः नाम लेना आवश्यक है जिन्होंने संपादक गणों की बहुविधियों से सहायता की और अमूल्य सुझाव दिए। उत्तर विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के डा० एस० के० सिंह गौतम द्वारा प्रदान किए गए। हिन्दी संस्करण का विषय-संपादन डा० के० सी० मदान और श्री महेन्द्र शंकर द्वारा किया गया। इस पुस्तक को इतने अल्प समय में तैयार करने में मैं इनमें से प्रत्येक के प्रति उनकी लगन और परिश्रम के लिए आभारी हूँ।

परिषद् ने शिक्षकों और विद्यार्थियों से प्राप्त समालोचनाओं के आधार पर सदैव अपनी शैक्षिक सामग्री में सुधार करने का प्रयत्न किया है। हम अगले संस्करण में संभव सुधार हेतु उनकी प्रतिक्रियाओं का कृतज्ञता से स्वागत करेंगे।

शिव के० मित्र
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
सितम्बर 1979

प्रस्तावना

"मिडिल स्कूलों के लिए गणित" पुस्तकमाला की पुस्तक III का भाग II शिक्षकों और विद्यार्थियों के समक्ष प्रस्तुत करते हुए हमें अति प्रसन्नता है। इससे मिडिल कक्षाओं के लिए गणित की पुस्तकमाला संपूर्ण होती है। इसमें जो कुछ दिया गया है वह सामान्यता ज्यामिती, सांख्यिकी और व्यावसायिक गणित विषय शीर्षकों के अंतर्गत पढ़ाया जाता है। जैसा कि इस पुस्तकमाला की पहली पुस्तकों के उपयोगकर्ताओं से प्राप्त समालोचनाओं से स्पष्ट है कि ये पुस्तकें समुचित रूप से पसन्द की गई हैं। इस पुस्तक की विचारधारा और लेखन शैली भी पहली पुस्तकों जैसी ही है।

इस पुस्तक का प्रथम प्रारूप कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय के गणित विभाग के (अवकाश प्राप्त) वरिष्ठ प्रोफेसर और अध्यक्ष प्रो० एस० डी० चोपड़ा और विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के डा० कें० सी मदान द्वारा तैयार किया गया। जैसे ही लेखकों से यह प्रारूप प्राप्त हुआ इसके विषय-संपादन का उत्तरदायित्व हमें सौंपा गया। फिर हमने यह सोचा कि यदि हम संपादन से पूर्व अध्यापक वर्ग से परामर्श न करें तो यह अनुचित होगा क्योंकि अध्यापक ही कक्षा की स्थितियों तथा अपने विद्यार्थियों की योग्यता से सर्वाधिक परिचित होता है। अत: इस प्रारूप की समीक्षा करने हेतु राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उदयपुर में एक कार्य शिविर आयोजित किया गया। इसमें शिक्षकों और विषय-विशेषज्ञों ने भाग लिया। अंत में उनके सुझावों और टिप्पणियों के आधार पर हमने पुस्तक का विषय-संपादन किया। इसमें हमें विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के श्री आर० एस० कोठारी और डा० ए०आर० साहू की बहुविधियों से अमूल्य सहायता प्राप्त हुई। उत्तर इसी विभाग के डा० एस० के० सिंह गौतम द्वारा प्रदान किए गए। इस कार्य में हम कहाँ तक सफल हुए, यह इस पुस्तक के उपयोगकर्त्ताओं द्वारा ही आँका जा सकता है।

हम इस पुस्तक की कुछ विशेषताओं के विषय में बताना चाहेंगे जो कि इस पुस्तकमाला की पहली पुस्तकों में भी विद्यमान थीं और वे नीचे दी जा रही हैं।

(i) पुस्तक की भाषा सरल है जो कि 13+ आयु वर्ग के बच्चों द्वारा सरलता से समझी जा सकती है।

(ii) अधिकतर एककों से पहले एक पुनरावलोकन अनुच्छेद दिया गया है ताकि विद्यार्थी नई संकल्पनाओं को सीखने से पहले समुचित रूप से तैयार हो सकें।

(iii) किसी संकल्पना का परिचय देने से पूर्व विद्यार्थियों को अभिप्रेरित करने के लिए समुचित उदाहरण दिए गए हैं।

(iv) जहाँ तक हो सका है अनावश्यक शब्दावली और लिपिचिन्हों को छोड़ दिया गया है।

(v) विभिन्न स्थानों पर किसी कथन के पश्चात "क्यों ?" लगा दिया गया है ताकि विद्यार्थी ऐसा कथन देने के कारण ज्ञात करने का प्रयत्न कर सकें।

(vi) प्रत्येक एकक में विविध प्रकार के प्रश्न दिए गए हैं और जहाँ तक हो सका है प्रश्न वास्तविक जीवन की स्थितियों से लिए गए हैं।

(vii) पूरी पुस्तक में कक्षा के लिए क्रिया-कलापों के सुझाव दिए गए हैं।

(viii) कठिन प्रश्नों को तारांकित किया गया है।

(ix) कठिन अनुच्छेदों को भी तारांकित किया गया है और इन्हें प्रथम अध्ययन में छोड़ा जा सकता है।

(x) पुस्तक के प्रत्येक एकक के आरम्भ में दिया गया है कि इसमें हम क्या सीखेंगे और प्रत्येक एकक के अंत में मुख्य संकल्पनाओं की सूची दी गई है ताकि विद्यार्थी तुरंत यह याद कर सकें कि अमुक एकक में उन्होंने क्या पढ़ा है।

गणित को सीखने की कुछ 'अच्छी' आदतें पुस्तक I और II की प्रस्तावनाओं में दी गई हैं। विद्यार्थियों को चाहिए कि वे उन्हें फिर से पढ़ लें।

यद्यपि यह पुस्तक शिक्षकों एवं विषय-विशेषज्ञों से परामर्श कर के लिखी गई है फिर भी हम समझते हैं कि इसमें और भी सुधार हो सकते हैं। पुस्तक के अगले संस्करण में सुधार हेतु दिए गए सुझावों को पुस्तक के उपयोगकर्ताओं से प्राप्त करके हमें प्रसन्नता होगी।

सितम्बर 1979

सम्पादक गण

कृतज्ञता-ज्ञापन

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् निम्नलिखित व्यक्तियों की आभारी है जिन्होंने मार्च 1979 में राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उदयपुर में आयोजित एक कार्य शिविर में इस पाठ्यपुस्तक की मूल सामग्री की समीक्षा की :

1. श्री ओ० पी० अग्रवाल
   मेयो कालेज
   अजमेर

2. डा० के० एल० आर्य
   क्षेत्रीय शिक्षा महाविद्यालय
   अजमेर

3. श्री देवेन्द्र भटनागर
   राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान
   उदयपुर

4. श्री लाल सिंह भटनागर
   राजकीय उच्च प्राथमिक विद्यालय
   भटियानी चोहट्टा
   उदयपुर

5. श्री मोहन लाल दशोटर
   राजकीय उच्च प्राथमिक विद्यालय
   राव जी का हट्टा
   उदयपुर

6. श्री० एम० सी० गुप्ता
   डी० ए० वी० हायर सैकेन्डरी स्कूल
   चित्रगुप्त रोड
   नई दिल्ली

7. डा० आर० पी० गुप्ता
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
   प्रशिक्षण परिषद्
   नई दिल्ली

8. श्री बी० एल० जैन
   राजकीय उच्च प्राथमिक विद्यालय
   बिलोचिस्तान कालोनी
   उदयपुर

9. श्री बी० डी० मदान
   राजकीय बाल उच्चतर
   माध्यमिक विद्यालय
   झज्जर (हरियाणा)

10. डा० के० सी० मदान
    राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
    प्रशिक्षण परिषद्
    नई दिल्ली

11. श्री जे० पी० पांडे
    राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान
    उदयपुर

12. श्री भँवर लाल पाणेरी
    राजकीय उच्च प्राथमिक विद्यालय
    भूपाल पुरा
    उदयपुर

13. डा० सूर्य प्रकाश
A-98, अशोक विहार
फेज II
दिल्ली

14. डा० आत्मा राम साहू
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद
नई दिल्ली

15. श्री एस० के० शर्मा
आलोक भारती हायर सैकेन्डरी स्कूल
खुरेजी खास
दिल्ली

16. श्री बलबीर सिंह
राजपूताना रायफल्ज़
हीरोज़ मैमोरियल
हायर सैकेन्डरी स्कूल
दिल्ली कैंट

17. श्री के० एल० सिंघल
जैन हायर सैकेन्डरी स्कूल
शाहदरा
दिल्ली

18. श्री हरि नारायण त्रिपाठी
राजकीय उच्च प्राथमिक विद्यालय
गणेश गाटी
उदयपुर

19. श्री पी० के० व्यवहारे
मदर्ज़ इन्टरनेशनल स्कूल
श्री अरविंद मार्ग
नई दिल्ली

विषय-सूची

पुस्तक में प्रयुक्त गणित के संकेत

$+$	:	योग
$-$	:	व्यवकलन
$\times$	:	गुणन
$=$	:	के समान है
$\neq$	:	के समान नहीं है
$<$	:	से छोटा है
$>$	:	से बड़ा है
$\sqrt{}$	:	का धनात्मक वर्गमूल
$\sqrt[n]{}$	:	nवाँ मूल
%	:	प्रतिशत
Δ	:	त्रिभुज
$\angle$	:	कोण
$\parallel$	:	के समांतर है
$\perp$	:	पर लम्ब है
$\cong$	:	के सर्वांगसम है
$\sim$	:	के समरूप है
$\leftrightarrow$	:	के संगत है
M	:	अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य
f	:	बारंबारता

एकक VIII

त्रिभुजों की सर्वांगसमता

इस एकक में हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता के विषय में कुछ और सीखेंगे।

8.1 पुनरावलोकन

आकृतियों की सर्वांगसमता के विषय में आप पहले ही जानते हैं। अपनी पिछली कक्षाओं से आपको निम्नलिखित संकल्पनाओं का पुनरावलोकन करना चाहिए :

त्रिभुज।

त्रिभुज के अवयव।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता।

विशेष रूप से, आपको सर्वांगसमता के निम्नलिखित नियमों को दोहराना चाहिए :

1. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तदनुरूपी तीनों भुजाओं के समान हों। (SSS सर्वांगसमता नियम)

2. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा बीच का कोण दूसरे त्रिभुज की क्रमशः दो भुजाओं तथा बीच के कोण के समान हों। (SAS सर्वांगसमता नियम)

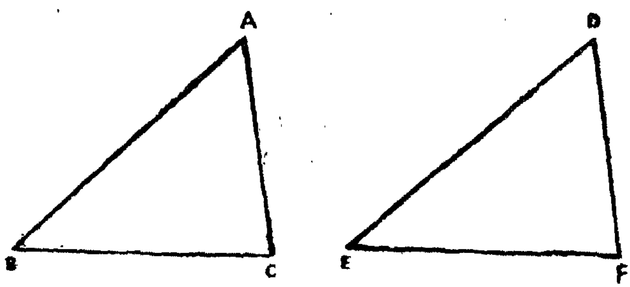
3. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण तथा बीच की भुजा दूसरे त्रिभुज के क्रमशः दो कोणों तथा बीच की भुजा के समान हों। (ASA सर्वांगसमता नियम)

4. दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज का कर्ण तथा एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण तथा एक भुजा के समान हों। (RHS सर्वांगसमता नियम)

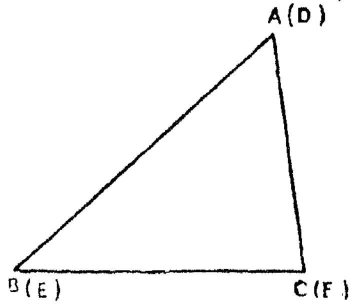
टिप्पणी : क्योंकि एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग सदैव 180° होता है, अतः ASA सर्वांगसमता नियम से यह निष्कर्ष निकलता है कि दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे यदि एक त्रिभुज के दो कोण तथा एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों तथा तदनुरूपी भुजा के समान हों। (AAS सर्वांगसमता नियम)

8.2 कितनी विधियों से दो त्रिभुज सर्वांगसम हो सकते हैं ?

आइए पतले गत्ते के दो सर्वांगसम (असमान भुजाओं वाले) त्रिभुजों ABC और DEF की रचना करें जैसा कि आकृति 8.1 में दिखाया गया है। अब हम त्रिभुज DEF को उठाकर त्रिभुज ABC पर इस प्रकार रखने का प्रयत्न करते हैं कि वह त्रिभुज ABC को पूरी तरह से ढक ले।



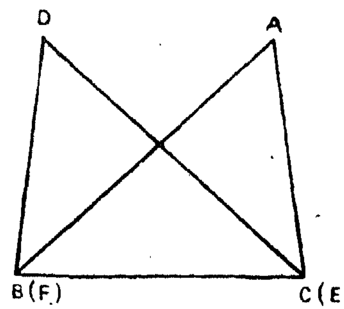
आकृति 8.1



आकृति 8.2

हम ऐसा कितनी विधियों से कर सकते हैं ? स्पष्ट रूप से एक विधि यह है कि हम D को A पर, E को B पर और F को C पर रखें जैसा कि आकृति 8.2 में दिखाया गया है ।

क्या ऐसा करने की कोई और विधि भी है ? आइए प्रयत्न करें । यदि हम ABC को DEF द्वारा पूरी तरह से ढकना चाहते हैं तो स्पष्टतया हमें ऐसा करना होगा कि DEF की भुजाएँ क्रमशः ABC की समान भुजाओं पर गिरें (पड़ें) । इस प्रकार, उदाहरणतया E, B पर और F, A पर नहीं गिर सकता, क्योंकि $EF \neq BA$ है । इसके उपरान्त आइए E को C पर और F को B पर गिराने का प्रयत्न करें । ऐसा करना सम्भव होना चाहिए क्योंकि $EF = BC$ है । हम त्रिभुज DEF को उलट कर और फिर इसे ABC पर रखकर ऐसा कर सकते हैं ताकि E, C पर और F, B पर गिरे । परन्तु D का क्या होगा ? क्या यह A पर गिरेगा ? नहीं । हमें ऐसी स्थिति प्राप्त होगी जैसी कि आकृति 8.3 में दिखाई गई है । त्रिभुज DEF त्रिभुज ABC को पूरी तरह से नहीं ढक सकता । हम ऐसा कह सकते हैं कि त्रिभुज ABC त्रिभुज DFE के सर्वांगसम नहीं है ।



आकृति 8.3

हम अन्य सम्भावनाओं के लिए प्रयत्न कर सकते हैं । उदाहरणतया, हम E को A पर और D को B पर रख सकते हैं । हम देखेंगे कि F, C पर नहीं गिरता ।

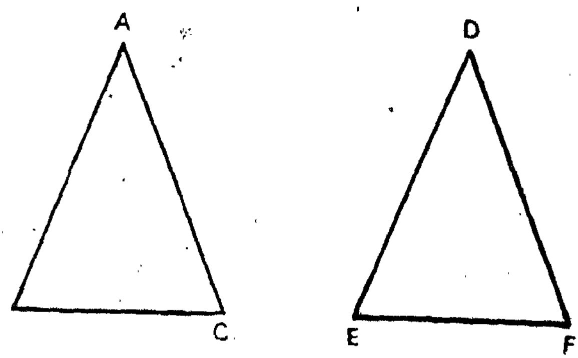
हम देखते हैं कि ऐसी एक ही विधि है जिससे त्रिभुज DEF को त्रिभुज ABC पर इस प्रकार रखा जा सके कि यह ABC को पूरी तरह से ढक ले और वह विधि यह है कि D, A पर; E, B पर और F, C पर गिरता है । हम इस

तथ्य को अन्य प्रकार से कह सकते हैं। **त्रिभुज ABC और DEF केवल एक विधि से ही सर्वांगसम हैं जिसमें A, D के; B, E के और C, F के संगत (correspond)** हैं। इस संगति (correspondence) को प्रायः संकेतन द्वारा निम्न रूप से दिखाया जाता है :

A↔D
B↔E अथवा केवल ABC↔DEF
C↔F

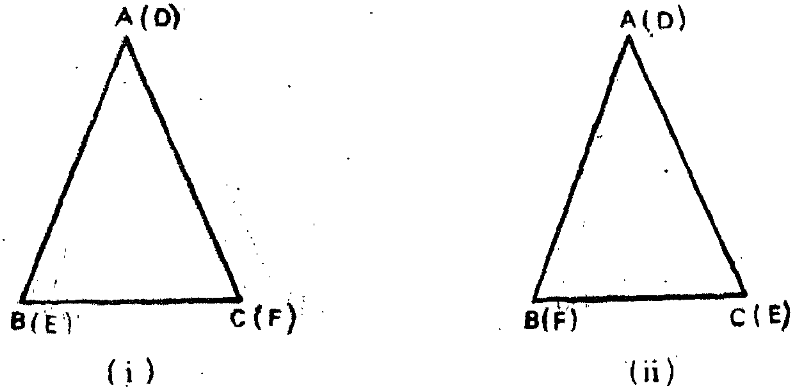
आकृति 8.1 में त्रिभुज ABC (अथवा त्रिभुज DEF) की सभी भुजाएँ असमान लम्बाइयों की हैं। यदि त्रिभुज की दो अथवा तीनों भुजाएँ समान हों तो क्या होगा ?

अब आइए दो सर्वांगसम समद्विबाहु त्रिभुजों ABC और DEF की रचना करें ताकि AB=AC=DE=DF=4 सें० मी० (मान लीजिए)



आकृति 8.4

तथा BC=EF=3 सें० मी० (मान लीजिए) हो। (देखिए आकृति 8.4) आइए अब त्रिभुज DEF को त्रिभुज ABC पर इस प्रकार रखें कि F, B पर और E, C पर गिरता है। D का क्या होता है ? हम देखते हैं कि D, A पर गिरता है। क्या त्रिभुज DEF त्रिभुज ABC को पूरी तरह से ढक लेता है ? हाँ। अतः हम देखते हैं कि त्रिभुज ABC और DEF न केवल तभी सर्वांगसम

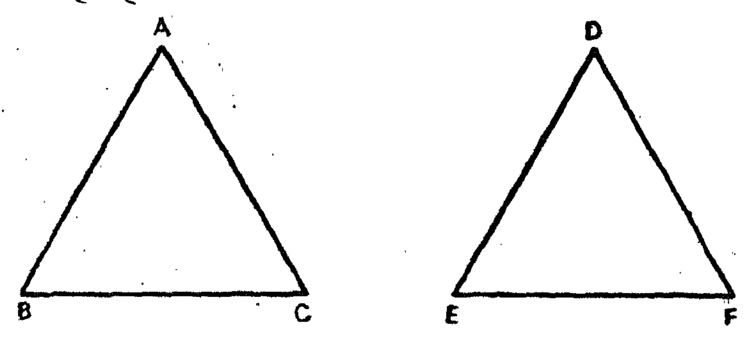


आकृति 8.5

हैं जब शीर्ष A और D, B और E तथा C और F परस्पर संगत हैं, अपितु तब भी सर्वांगसम हैं जब शीर्ष A और D, B और F तथा C और E परस्पर संगत हैं। (देखिए आकृति 8.5)

हम इस प्रयोग को दोहरा सकते हैं जब (i) D, B पर गिरता है तथा (ii) जब D, C पर गिरता है। हम दोनों स्थितियों (i) और (ii) में देखते हैं कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

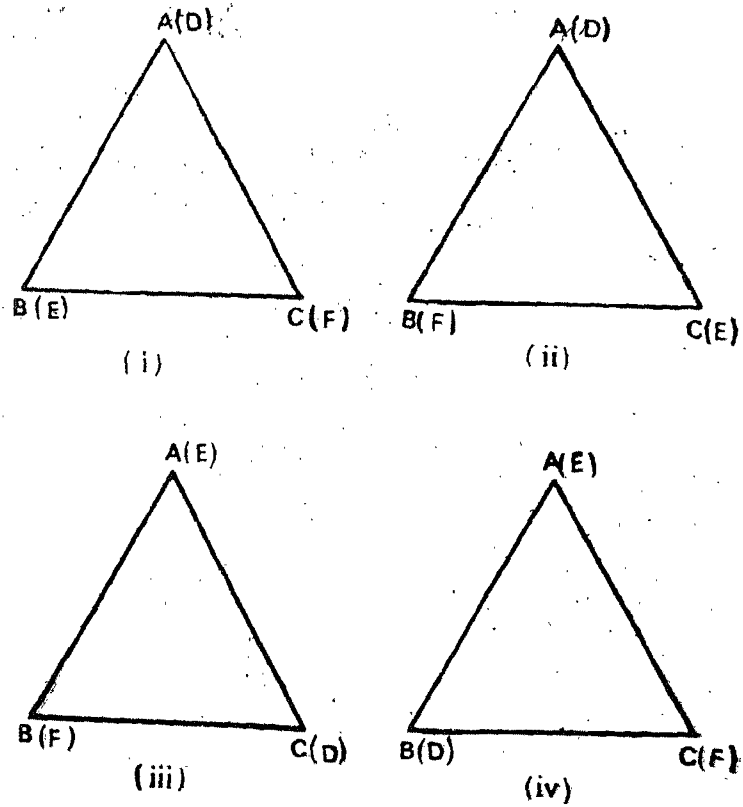
हम इस प्रयोग को सर्वांगसम समद्विबाहु त्रिभुजों के अन्य जोड़े लेकर भी दोहरा सकते हैं। प्रत्येक अवस्था में हम देखते हैं कि प्रत्येक जोड़ा दो विधियों से सर्वांगसम है। इस प्रकार, **दो सर्वांगसम समद्विबाहु त्रिभुज दो विधियों से सर्वांगसम होते हैं।**



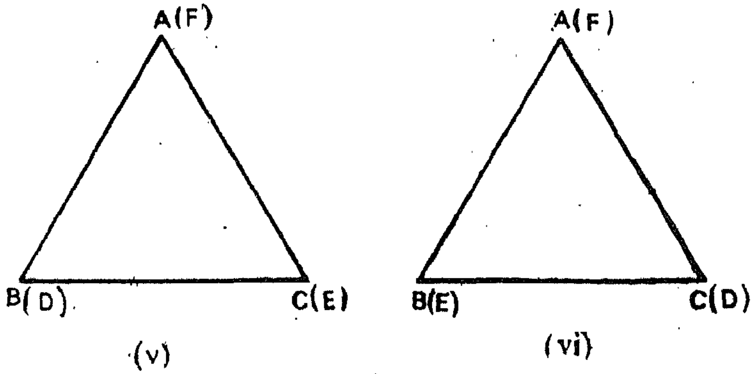
आकृति 8.6

आइए अब पतले गत्ते के दो सर्वांगसम समबाहु त्रिभुजों ABC और DEF की रचना करें। (देखिए आकृति 8.6)

हम त्रिभुज DEF को त्रिभुज ABC पर कितनी विधियों से रख सकते हैं ताकि यह ABC को पूरी तरह से ढक ले ? बार-बार प्रयत्न करने पर हम देखेंगे कि हम ऐसा छः भिन्न विधियों से कर सकते हैं। ये विधियाँ आकृति 8.7 में दिखाई गई हैं।



आकृति 8.7



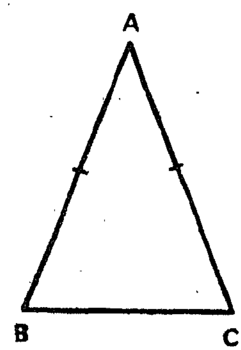
आकृति 8.7

क्या आकृति 8.7 से किसी ऐसी विधि का संकेत मिलता है जिससे हम बार-बार प्रयत्न किए बिना इन छः सम्भावनाओं पर पहुँच सकें ? इस प्रकार **दो सर्वांगसम समबाहु त्रिभुज छः भिन्न विधियों से सर्वांगसम हो सकते हैं।**

उपरोक्त प्रयोगों से, हम देखते हैं कि जब हम कहते हैं कि दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो हमें यह भी कहना चाहिए कि त्रिभुज के शीर्ष किस प्रकार संगत हैं। ऐसा प्रायः दोनों त्रिभुजों के नाम इस प्रकार से देकर किया जाता है कि एक त्रिभुज का पहला, दूसरा और तीसरा शीर्ष क्रमशः दूसरे त्रिभुज के पहले, दूसरे और तीसरे शीर्ष के संगत होता है।

8.3 एक त्रिभुज की स्वयं से सर्वांगसमता

प्रत्येक त्रिभुज को स्वयं से सर्वांगसम समझा जा सकता है, अर्थात् जब प्रत्येक शीर्ष को स्वयं का संगत समझा जाए। इस प्रकार की सर्वांगसमता में हमारी रुचि नहीं है। परन्तु समद्विबाहु और समबाहु त्रिभुज एक भिन्न रूप में स्वयं से सर्वांगसम हो सकते हैं, जो कुछ रुचिपूर्ण है। आइए एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC पर विचार करें जिसमें $AB=AC$ है। (देखिए आकृति 8.8)



आकृति 8.8

आइए अब त्रिभुजों ABC और ACB को लें। क्या निम्नलिखित सत्य हैं ?

BC = CB (क्यों ?)

CA = BA (क्यों ?)

AB = AC (क्यों ?)

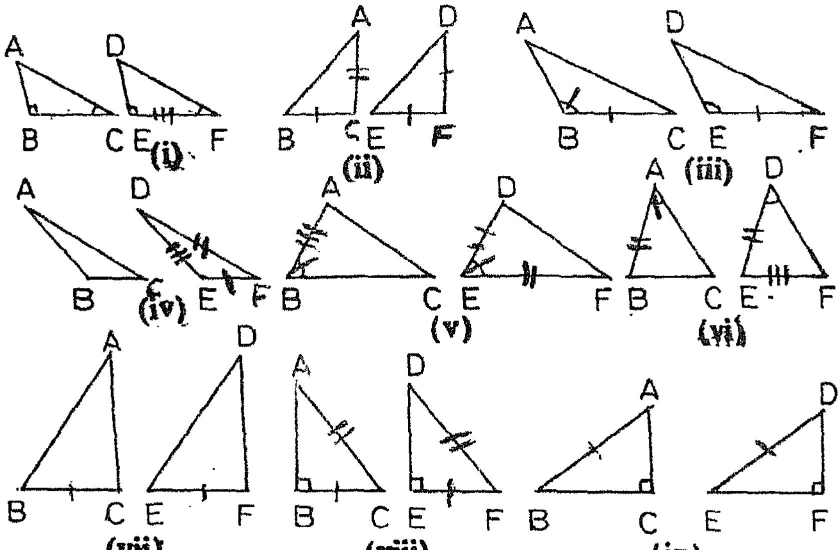
इस प्रकार, त्रिभुज ABC और ACB, SSS सर्वांगसमता नियम द्वारा सर्वांगसम हैं। अतः उनके तदनुरूपी कोण समान हैं। अब त्रिभुज ABC का ∠B त्रिभुज ACB के ∠C के तदनुरूपी है। अतः,

$\angle B = \angle C$

दूसरे शब्दों में, **एक समद्विबाहु त्रिभुज में, समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।** क्या इस गुण के विषय में आपने कक्षा VII में पढ़ा था ? हाँ।

प्रश्नावली 8.1

1. आकृति 8.9 में त्रिभुजों के 9 जोड़े दिए गए हैं जिनमें समान अवयवों को एक ही तरह से अंकित किया गया है। प्रत्येक जोड़े के लिए यह निर्णय कीजिए कि क्या दी गई सूचना दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता को निश्चित करने के लिए पर्याप्त है। यदि नहीं, तो बताइए कि सर्वांगसमता के लिए और किस सूचना की आवश्यकता है। प्रत्येक अवस्था में आप जिस सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करते हैं वह भी बताइए।



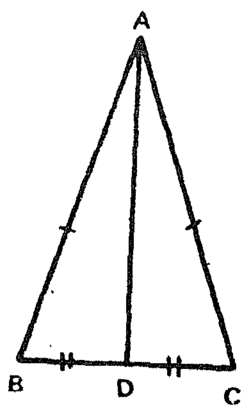
आकृति 8.9

2. आकृति 8.10 में ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है तथा AD उसकी एक माध्यिका है।

(i) क्या $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ है ?

(ii) क्या $\angle ADB = \angle ADC = 90°$ है ?

सकारण उत्तर दीजिए।

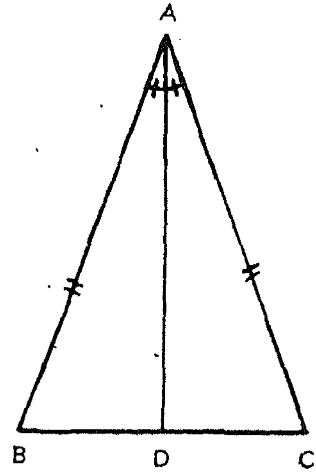


आकृति 8.10

3. आकृति 8.11 में ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है और AD, ∠BAC का समद्विभाजक है।

(i) क्या △ ABD ≅ △ACD है ?
(ii) क्या D, BC का मध्य-बिन्दु है ?
(iii) क्या ∠ADC = 90° है ?

सकारण उत्तर दीजिए।

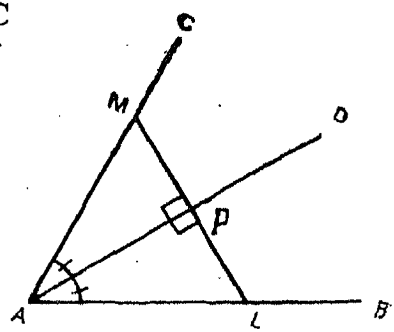


आकृति 8.11

4. आकृति 8.12 में AD, ∠BAC का समद्विभाजक है और P इस पर कोई बिन्दु है। साथ ही, L PM ⊥ AD है।

(i) क्या △APM ≅ △APL है ?
(ii) क्या PM = PL है ?

सकारण उत्तर दीजिए।



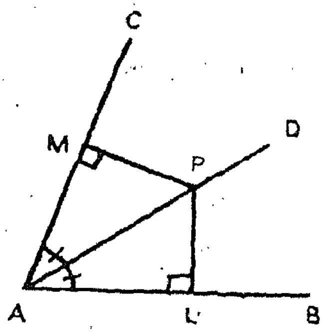
आकृति 8.12

5. आकृति 8.13 में AD, ∠BAC का समद्विभाजक है और P इस पर कोई बिन्दु है। साथ ही PL ⊥ AB और PM ⊥ AC है।

(i) क्या $\triangle APM \cong \triangle APL$ है ?

(ii) क्या $PM = PL$ है ?

सकारण उत्तर दीजिए।



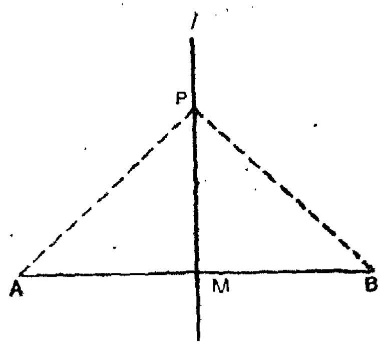
आकृति 8.13

6. आकृति 8.14 में B रेखा l के सापेक्ष A का सममित (symmetric) है और P, l पर कोई विन्दु है।

(i) क्या $\triangle PAM \cong \triangle PBM$ है ?

(ii) क्या $PA = PB$ है ?

सकारण उत्तर दीजिए।



आकृति 8.14

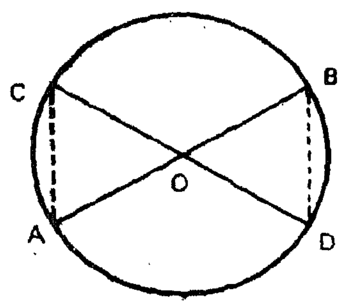
7. आकृति 8.15 में AOB और COD एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, के कोई दो व्यास हैं। A और C तथा B और D को मिलाइए।

(i) क्या $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ है ?

(ii) क्या $\angle A = \angle B$ और $\angle C = \angle D$ है ?

(iii) क्या $AC = BD$ है ?

सकारण उत्तर दीजिए।



आकृति 8.15

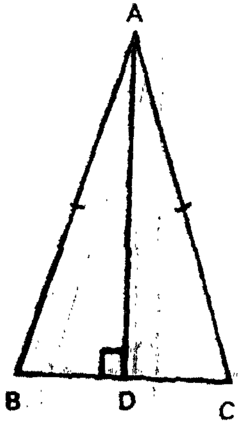
8. आकृति 8.16 में ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB=AC है और AD एक शीर्षलम्ब है।

(i) क्या $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ है ?

(ii) क्या D, BC का मध्य-बिन्दु है ?

(iii) क्या $\angle BAD = \angle CAD$ है ?

सकारण उत्तर दीजिए।



आकृति 8.16

9. ABC और DEF दो त्रिभुज हैं। इस तथ्य से कि $\triangle ABC \cong \triangle EDF$ है आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ?

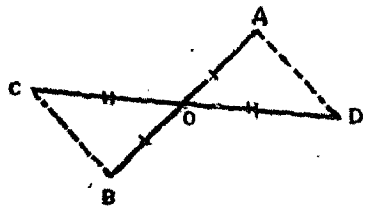
10. आकृति 8.17 में O, AB और CD का मध्य-बिन्दु है। निम्नलिखित कथनों में से कौन से सत्य हैं ?

(i) $\triangle$ AOD $\cong$ $\triangle$ BOC

(ii) $\angle B = \angle D$ और $\angle C = \angle A$

(iii) $\angle A = \angle B$ और $\angle C = \angle D$

(iv) AD=CB



आकृति 8.17

सकारण उत्तर दीजिए।

*11. कोई त्रिभुज ABC खींचिए और उसकी माध्यिका CD की रचना कीजिए। क्रमशः त्रिभुजों BDC और ADC के शीर्षलम्ब BE और AF खींचिए। क्या BE=AF है ? सकारण उत्तर दीजिए। माप कर भी जाँच कीजिए।

मुख्य संकल्पनाएँ

SSS सर्वांगसमता नियम

SAS सर्वांगसमता नियम

ASA सर्वांगसमता नियम

RHS सर्वांगसमता नियम

एक त्रिभुज की स्वयं से सर्वांगसमता

एकक IX

समांतर रेखाएँ और समरूपता

हम रेखाखंडों के अनुपातों और तिर्यक रेखाओं पर समांतर रेखाओं द्वारा बनाए गए अंत: खंडों के बीच सम्बन्धों के विषय में सीखेंगे। हम त्रिभुजों की समरूपता के विषय में भी सीखेंगे।

9.1 पुनरावलोकन

आप समांतर रेखाओं और उनके कुछ गुणों के विषय में पहले ही जानते हैं। अपनी पिछली कक्षाओं से आपको निम्नलिखित संकल्पनाओं / परिणामों का पुनरावलोकन करना चाहिए :

समांतर रेखाएँ : समांतर रेखाओं के बीच की दूरी।

समांतर रेखाओं की तिर्यक रेखाएँ।

संगत कोण, एकांतर कोण, अंत: कोण तथा बाह्य कोण।

यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटती है, तो

(i) **संगत कोण समान होते हैं,**

(ii) **एकांतर कोण समान होते हैं,**

(iii) **तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोण संपूरक होते हैं।**

आपको संख्याओं के अनुपातों और समानुपातों को भी दोहराना चाहिए।

9.2 अनुपात और समानुपात

हम संख्याओं के अनुपातों के विषय में पहले पढ़ चुके हैं। इस प्रकार, 3 का 4 से अनुपात $\frac{3}{4}$ है, -7 का -9 से अनुपात $\frac{-7}{(-9)} = \frac{7}{9}$ है, इत्यादि। व्यापीकृत रूप में, किसी संख्या p का q से अनुपात $\frac{p}{q}$ है, जहाँ $q \neq 0$ है। (क्यों ?)

हम चार संख्याओं के **समानुपात** के विषय में भी सीख चुके हैं। इस प्रकार चार संख्याएँ a, b, c, d समानुपात में हैं यदि a का b से अनुपात वही है जो c का d से है। उदाहरणार्थ संख्याएँ 1, 2, 3, 6 समानुपात में हैं क्योंकि $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ है। हम यह भी कहते हैं कि संख्याएँ a, b संख्याओं c, d के **समानुपाती** हैं अथवा यह कि संख्याएं a, b और c, d एक ही **अनुपात** में हैं।

क्योंकि रेखाखण्डों की लम्बाइयाँ भी संख्याएं होती हैं, अतः हम **दो रेखाखण्डों के अनुपात को उनकी लम्बाइयों के अनुपात के रूप में** परिभाषित करते हैं। इस प्रकार, उदाहरणार्थ यदि AB=4.6 सें० मी०, CD=6.9 सें० मी० है तो दोनों रेखाखंडों का अनुपात निम्न है :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{4.6}{6.9} = \frac{2 \times 2.3}{3 \times 2.3} = \frac{2}{3}$$

यह याद रखना चाहिए कि अनुपात लेते समय सभी रेखाखंडों को एक ही मात्रक में मापना चाहिए। उदाहरणार्थ, AB=4 सें० मी० और CD=60 मि० मी० का अनुपात $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ है।

दो रेखाखंडों के अनुपात को उनकी लम्बाइयों के अनुपात के रूप में परिभाषित करने के पश्चात, संख्याओं के अनुपात और समानुपात की सभी संकल्पनाएँ रेखाखंडों के लिए भी लागू की जा सकती हैं। उदाहरणार्थ, यदि AB=5.6 सें० मी०, CD=7 सें० मी०, EF=8 सें० मी० और GH=10 सें० मी० है, तो

$$\frac{AB}{CD}=\frac{5.6}{7}=\frac{4\times 1.4}{5\times 1.4}=\frac{4}{5} \text{ और } \frac{EF}{GH}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

इस प्रकार $\frac{AB}{CD}$, $\frac{EF}{GH}$ के समान है। अतः AB, CD, EF, GH समानुपात में हैं।

टिप्पणी : जब चार रेखाखंड AB, CD, EF और GH समानुपात में हैं, तो

$$\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$$

वज्र-गुणन (cross multiplication) द्वारा यह सम्बन्ध इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$AB\times GH=CD\times EF$$

इस सम्बन्ध को साधारण ज्यामितीय भाषा में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

यदि चार रेखाखंड समानुपात में हों, तो पहले और चौथे रेखाखंडों द्वारा बने आयत का क्षेत्रफल दूसरे और तीसरे रेखाखंडों द्वारा बने आयत के क्षेत्रफल के समान होता है।

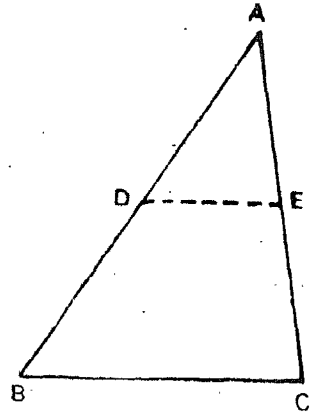
प्रश्नावली 9.1

1. ABC एक त्रिभुज है जिसमें भुजा BC=6 सें० मी०, CA=5 सें० मी० और AB=4 सें० मी० है। इसकी भुजाओं से आप कितने अनुपात बना सकते हैं? इन्हें और इनके संख्यात्मक (numerical) मानों को लिखिए।
2. निम्नलिखित रेखाखंडों के युग्मों के अनुपात बताइए :
   (i) AB=4.4 सें० मी०, CD=55 मि० मी०
   (ii) AB=33 मि० मी०, CD=6.6 सें० मी०
   (iii) AB=2.4 मी०, CD=120 सें० मी०
   (iv) AB=1780 मि० मी०, CD=0.89 मी०
3. निम्नलिखित की किन्हीं दो भुजाओं का क्या अनुपात है?
   (i) एक समबाहु त्रिभुज

(ii) एक वर्ग

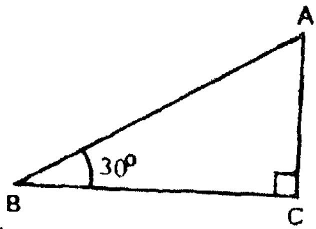
(iii) एक समचतुर्भुज

4. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए और इसकी भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदुओं D और E को अंकित कीजिए। (देखिए आकृति 9.1) BC और DE को मापिए और जाँच कीजिए कि DE का BC से अनुपात 1 : 2 है।



आकृति 9.1

5. एक समकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 4 सें॰ मी॰, ∠B = 30° और ∠C = 90° हों। (देखिए आकृति 9.2) भुजा AC और कर्ण AB को मापिए। जाँच कीजिए कि AC का AB से अनुपात 1 : 2 है।

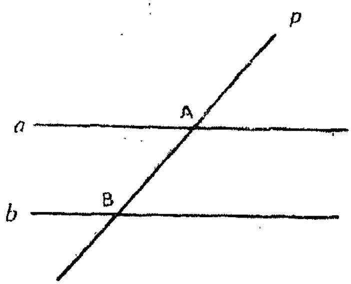


आकृति 9.2

6. AB, CD, EF, GH समानुपात में हैं। जाँच कीजिए कि CD, AB, GH, EF भी समानुपात में हैं। क्या आप कोई और क्रम ज्ञात कर सकते हैं जिसमें ये चारों रेखाखंड समानुपात में हैं ?

9.3 एक तिर्यक रेखा पर अंतः खंड

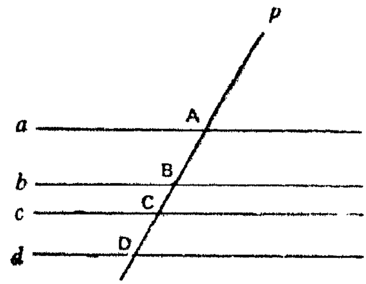
दो समांतर रेखाओं द्वारा एक तिर्यक रेखा पर काटा गया रेखाखंड **दोनों रेखाओं द्वारा तिर्यक रेखा पर अंतः खंड (intercept)** कहलाता है। उदाहरणार्थ, यदि a, b दो समांतर रेखाएँ हैं और एक तिर्यक रेखा p उन्हें क्रमशः बिंदुओं A और B पर काटती है, तो रेखाखंड AB, रेखाओं a, b द्वारा



आकृति 9.3

p पर बनाया गया अंतः खंड है। (देखिए आकृति 9.3)

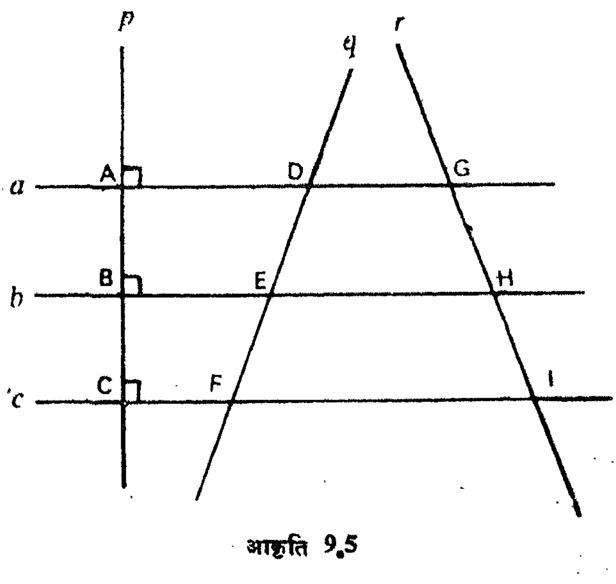
इसी प्रकार हम दो से अधिक समांतर रेखाओं द्वारा एक तिर्यक रेखा पर बनाए गए अतः खंडों को परिभाषित कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि कुछ समांतर रेखाएँ a, b, c,...एक तिर्यक रेखा p को क्रमशः बिन्दुओं A, B, C,... पर काटती हैं, तो ये समांतर रेखाएँ p पर AB, BC,...अंतः खंड बनाती हैं। (देखिए आकृति 9.4)



आकृति 9.4

9.4 किसी तिर्यक रेखा पर तीन समदूरस्थ समांतर रेखाओं द्वारा बनाए गए अंतः खंडों के बीच सम्बन्ध

आइए तीन समांतर रेखाएँ a, b और c इस प्रकार से खींचें कि b और c के बीच वही दूरी हो (उदाहरणार्थ 1.5 सें० मी०) जो a और b के बीच है।



आकृति 9.5

हम इनकी रचना किस प्रकार कर सकते हैं ? हम निम्नलिखित विधि से ऐसा कर सकते हैं :

हम एक रेखा p खींचते हैं और इस पर दो रेखाखंड AB और BC इस प्रकार लेते हैं कि AB=BC=1.5 सें० मी० हो । फिर हम बिन्दुओं A,B और C से होकर क्रमश: तीन रेखाएँ a, b और c खींचते हैं जो p पर लम्ब हैं । तब a, b और c तीनों वाँछित समांतर रेखाएँ हैं । (क्यों ?)(देखिए आकृति 9.5) हम ऐसी तीन समांतर रेखाओं को **समदूरस्थ (equidistant)** कहेंगे ।

तत्पश्चात्, आइए रेखाओं a, b और c की एक तिर्यक रेखा q खींचें जो उन्हें क्रमश: बिन्दुओं D, E और F पर काटती है । अब आइए DE और EF को मापें । हम क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि DE=EF है । पुन:, आइए अन्य तिर्यक रेखा r खींचें जो a, b और c को क्रमश: G, H और I पर काटती है और GH तथा HI को मापें । हम क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि GH=HI है ।

आइए कितनी ही तिर्यक रेखाएँ लेकर इस प्रयोग को बार बार दोहराएँ । हम क्या देखते हैं ? प्रत्येक बार हम यह देखते हैं कि तीन समांतर रेखाओं द्वारा तिर्यक रेखा पर काटे गए अंत: खंड समान हैं । इस प्रकार हम देखते हैं कि

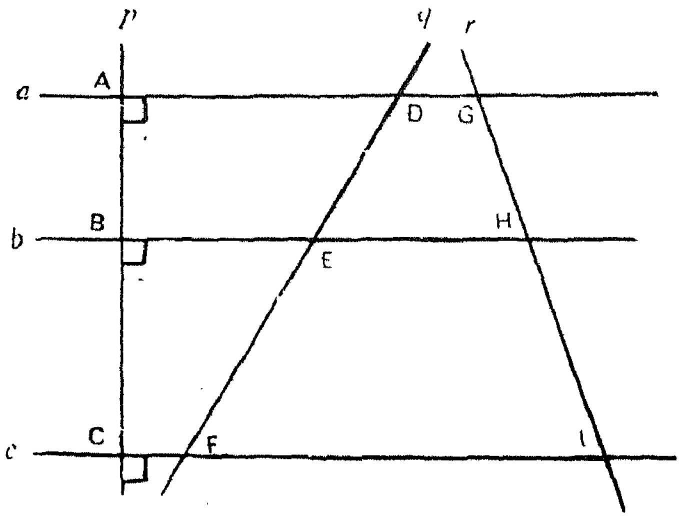
तीन समदूरस्थ समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक रेखा पर समान अंत: खंड काटती हैं । हम इस गुण को **समान अंत: खंड गुण (equal intercepts property)** कहते हैं ।

इस गुण का विलोम भी सत्य है, अर्थात् **यदि तीन समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक रेखा पर समान अंत: खंड काटती हैं, तो वे समदूरस्थ होती हैं । निस्संदेह,** वे तब किसी अन्य तिर्यक रेखा पर भी समान अंत: खंड काटती हैं ।

उपरोक्त गुणों को वास्तव में कक्षा VII में स्पष्ट किए गए अर्थ में 'सिद्ध' किया जा सकता है । हम त्रिभुजों के ASA सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके ऐसा कर सकते हैं ।

9.5 तीन समांतर रेखाओं द्वारा किसी तिर्यक रेखा पर काटे गए अंतः खंडों के बीच सम्बन्ध

आइए तीन समांतर रेखाएँ a, b और c इस प्रकार खींचें कि a और b के बीच की दूरी 2 सें० मी० तथा b और c के बीच की दूरी 3 सें० मी० हो। हम इन्हें कैसे खींचेंगे ? हम इनकी रचना वैसे ही करेंगे जैसा हमने अनुच्छेद 9.4 में किया था। अन्तर केवल यह है कि अब हम एक रेखा p पर AB = 2 सें० मी० और BC = 3 सें० मी० लेते हैं और बिन्दुओं A, B और C से होकर क्रमशः तीन रेखाएँ a, b और c खींचते हैं जो p पर लम्ब हैं। ध्यान दीजिए कि p रेखाओं a, b और c की तिर्यक रेखा है। (देखिए आकृति 9.6)



आकृति 9.6

आइए रेखाओं a, b और c की एक और तिर्यक रेखा q खींचें जो इन्हें क्रमशः बिन्दुओं D, E और F पर काटती है। आइए अब रेखाखंडों DE और

EF को मापें और अनुपात $\frac{DE}{EF}$ को परिकलित करें। हम क्या देखते हैं ?

हम देखते हैं कि अनुपात $\frac{DE}{EF}=\frac{2}{3}$ है।

पुनः, आइए एक और तिर्यक रेखा r खींचें जो a, b और c को क्रमशः बिन्दुओं G, H और I पर काटती है। अब आइए रेखाखंडों GH और HI को मापें और अनुपात $\frac{GH}{HI}$ को परिकलित करें। हम देखते हैं कि यह अनुपात भी $\frac{2}{3}$ है।

यदि हम कितनी ही दूसरी तिर्यक रेखाएँ खींचें, प्रत्येक पर बने अंतः खंडों को मापें और उनका अनुपात परिकलित करें, तो हम देखेंगे कि प्रत्येक अवस्था में यह अनुपात $\frac{2}{3}$ है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि किसी तिर्यक रेखा पर बने अंतः खंडों का अनुपात समान अर्थात् $\frac{2}{3}$ है जो कि समांतर रेखाओं के बीच की दूरियों का अनुपात भी है।

हम भिन्न भिन्न दूरियों सहित समांतर रेखाओं के दूसरे समुच्चय लेकर इस प्रयोग को दोहरा सकते हैं। प्रत्येक अवस्था में हम देखेंगे कि किसी तिर्यक रेखा पर बने अंतः खंडों का अनुपात समान है और यह अनुपात उनके बीच की दूरियों के अनुपात के समान है। अतः हम देखते हैं कि

तीन समांतर रेखाओं द्वारा किसी तिर्यक रेखा पर बने अंतः खंडों का अनुपात उन रेखाओं के बीच की दूरियों के अनुपात के समान होता है। हम इस गुण को **समानुपाती अंतः खंड गुण (proportional intercepts property)** कहते हैं।

हम इस गुण पर एक दूसरी तरह से विचार कर सकते हैं। जैसा कि हम ऊपर देख चुके हैं, आकृति 9.6 से

$$\frac{DE}{EF}=\frac{GH}{HI}=\frac{AB}{BC}$$

इस प्रकार, चारों अंतः खंड DE, EF, GH और HI समानुपात में

हैं, अथवा अंत: खंड GH, HI अंत: खंडों DE, EF के समानुपाती हैं। अतः उपरोक्त गुण निम्न प्रकार से भी व्यक्त किया जा सकता है :

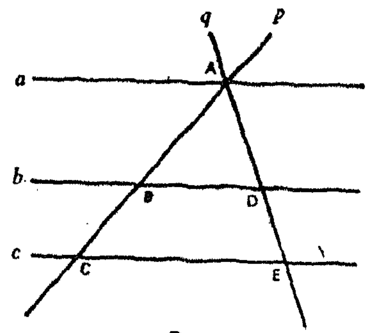
तीन समांतर रेखाएँ किन्ही दो तिर्यक रेखाओं पर समानुपाती अंत: खंड काटती हैं।

समान अंत: खंड गुण की भाँति इस गुण को भी सिद्ध* किया जा सकता है। समानुपाती अंत: खंड गुण आकृतियों की समरूपता से सम्बन्धित सम्पूर्ण कार्य का आधार है, जो कि हम आगे चलकर पढ़ेंगे।

टिप्पणी : इसकी सुगमतापूर्वक जाँच की जा सकती है कि उपरोक्त दोनों गुण अर्थात् समान अंत: खंड गुण तथा समानुपाती अंत: खंड गुण तीन से अधिक समांतर रेखाओं के लिए भी सत्य हैं।

9.6 किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर कोई रेखा त्रिभुज की अन्य दो भुजाओं को एक ही अनुपात में काटती है

आइए तीन समांतर रेखाएँ a, b और c तथा एक तिर्यक रेखा p खींचें जो उन्हें क्रमशः बिन्दुओं A, B और C पर काटती है। (देखिए आकृति 9.7) आइए A से होती हुई एक अन्य तिर्यक रेखा q खींचें जो b तथा c को क्रमशः D और E पर काटती है। तब a, b और c तिर्यक रेखा p पर अंत: खंड AB, BC और तिर्यक रेखा q पर अंत: खंड AD, DE काटती हैं। समानुपाती अंत: खंड गुण हमें क्या बताता है ? यह हमें बताता है कि



आकृति 9.7

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

हम आकृति 9.7 पर एक अन्य प्रकार से विचार कर सकते हैं। ACE एक त्रिभुज है तथा रेखा b आधार CE के समांतर खींची गई है जो AC और

*हम अगली कक्षाओं में इसकी उपपत्ति सीखेंगे।

AE को क्रमशः B और D पर काटती है। बिन्दु B और D भुजाओं AC और AE को क्रमशः रेखाखंडों $\overline{AB}$, BC और AD, DE में इस प्रकार विभाजित करते हैं कि $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}$ है। अतः, हम देखते हैं कि

एक त्रिभुज की एक भुजा के समांतर खींची गई कोई रेखा, अन्य दो भुजाओं को एक ही अनुपात में काटती है।

इस गुण का विलोम भी सत्य है, अर्थात्

यदि कोई रेखा एक त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में काटती है, तो वह रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

अगले अनुच्छेद में कुछ रचनाएँ करने में हम इन गुणों का प्रयोग करेंगे।

9.7 रचनाएँ

9.7.1 किसी रेखाखंड को समान रेखाखंडों में विभाजित करना

मान लीजिए हमें 10 सें० मी० लम्बाई का एक रेखाखंड AB दिया जाता है और हमें इसे, उदाहरणार्थ, 6 समान रेखाखंडों में विभाजित करने के लिए कहा जाता है। (देखिए, मिडिल स्कूलों के लिए गणित, पुस्तक II भाग I, अनुच्छेद 1.3, पृष्ठ 7)। याद कीजिए कि रचना के विभिन्न चरण निम्न थे :

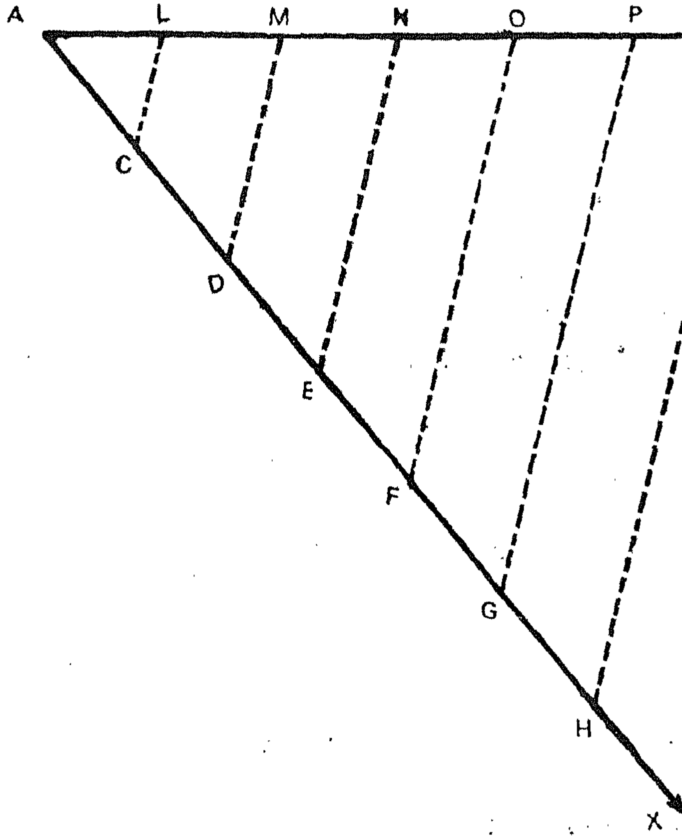
चरण 1 : हम AB=10 सें० मी० खींचते हैं और एक कोण BAX की रचना करते हैं।

चरण 2 : परकार का प्रयोग करते हुए, हम AX पर छः बिंदु C, D, E, F, G और H इस प्रकार अंकित करते हैं कि AC=CD=DE=EF=FG=GH है।

चरण 3 : हम B और H को मिलाते हैं।

चरण 4 : G से होकर हम HB के समांतर एक रेखा GP खींचते हैं। इसी प्रकार, F से होकर हम एक रेखा FO || HB खींचते हैं, इत्यादि जैसा कि आकृति 9.8 में दिखाया गया है।

तब AL, LM, MN, NO, OP, और PB वांछित छः समान रेखाखंड हैं।



आकृति 9.8

हम इस रचना को समान अंतः खंड गुण द्वारा सिद्ध कर सकते हैं। (कैसे?)

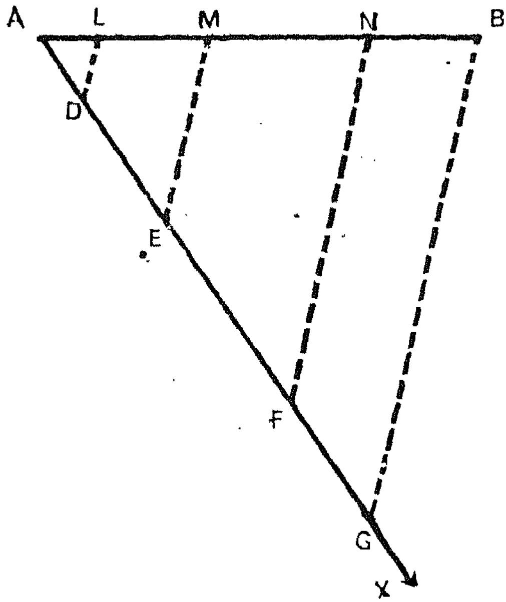
9.7.2 किसी रेखाखंड को एक दिए हुए अनुपात में विभिन्न रेखाखंडों में विभाजित करना

मान लीजिए हमें एक रेखाखंड AB =6 सें० मी० दिया गया है और हमें इसे 1 : 2 : 3 : 2 के अनुपात में 4 रेखाखंडों में विभाजित करने को कहा

जाता है। यह रचना हम निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम AB = 6 सें० मी० खींचते हैं और एक कोण BAX की रचना करते हैं।

चरण 2 : परकार का प्रयोग करते हुए, हम AX पर 4 बिंदु D, E, F और G इस प्रकार अंकित करते हैं कि AD, DE, EF और FG की लम्बाइयाँ क्रमशः 1 सें० मी०, 2 सें० मी०, 3 सें० मी० और 2 सें० मी० हों।



आकृति 9.9

चरण 3 : हम B और G को मिलाते हैं।

चरण 4 : F से होकर हम GB के समांतर एक रेखा FN खींचते हैं। इसी प्रकार, E से होकर हम GB के समांतर एक रेखा EM खींचते हैं, इत्यादि जैसा कि आकृति 9.9 में दिखाया गया है।

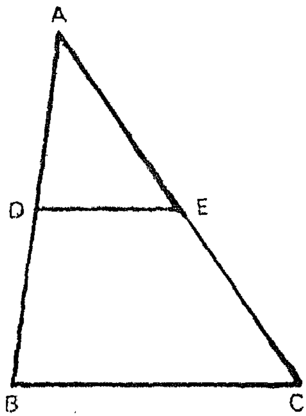
तब AL, LM, MN और NB चार वाँछित रेखाखण्ड हैं जो 1 : 2 : 3 : 2 के अनुपात में हैं। हम इस रचना को समानुपाती अंतः खड गुण से सिद्ध कर सकते हैं। (कैसे ?)

टिप्पणी : चरण 2 में हम AD, DE, EF और FG की लम्बाइयों को इस प्रकार ले सकते हैं कि वे क्रमशः संख्याओं 1,2,3 और 2 के समान गुणज हों। इस प्रकार, 1 सें० मी०, 2 सें०मी०, 3 सें० मी० और 2 सें० मी० की लम्बाइयों के स्थान पर हम क्रमशः 2 सें० मी०, 4 सें० मी०, 6 सें० मी० और 4 सें० मी० की लम्बाइयाँ ले सकते हैं। परन्तु रचना में लिया गया चयन सुविधाजनक है क्योंकि इसमें एक अधिक सुगम आकृति प्राप्त हो जाती है।

प्रश्नावली 9.2

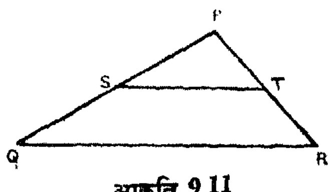
1. आकृति 9.10 में D, AB का मध्य-बिंदु है और DE ∥ BC है। क्या E, AC का मध्य-बिंदु है ? सकारण उत्तर दीजिए।

हम देखते हैं कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से होकर खींची गई एक अन्य भुजा के समांतर रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।



आकृति 9.10

2. आकृति 9.11 में S और T क्रमशः भुजाओं PQ और PR के मध्य-बिंदु हैं। क्या ST ∥ QR है ? सकारण उत्तर दीजिए।



आकृति 9.11

हम देखते हैं कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है।

3. आकृति 9.12 में D, E और F क्रमश: त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिन्दु हैं।

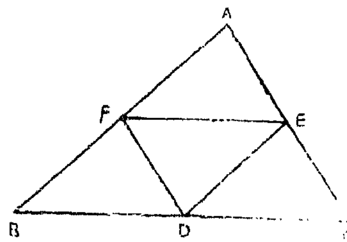
(i) क्या EF ∥ BC, FD ∥ CA और DE ∥ AB है?

(ii) क्या BDEF एक समांतर चतुर्भुज है?

(iii) क्या EF ∥ BD है?

(iv) क्या $EF = \frac{1}{2} BC$ है?

सकारण उत्तर दीजिए।



आकृति 9.12

हम देखते हैं कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा का आधा होता है।

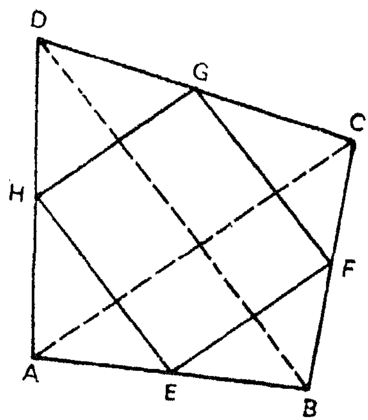
4. आकृति 9.13 में, ABCD एक चतुर्भुज है और E, F, G और H क्रमश: भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिंदु हैं। पुन:, AC और BD इसके विकर्ण हैं।

(i) क्या EF ∥ AC ∥ HG ?

(ii) क्या FG ∥ BD ∥ EH ?

(iii) क्या EFGH एक समांतर चतुर्भुज है?

सकारण उत्तर दीजिए।

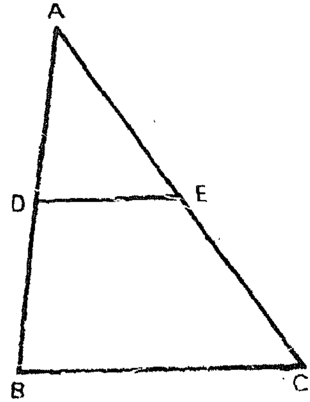


आकृति 9.13

5. आकृति 9.14 में, DE ∥ BC है।

क्या $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ है ?

सकारण उत्तर दीजिए।



आकृति 9.14

[संकेत : $\frac{AB}{AD} = \frac{BD}{AD} + 1$ और $\frac{AC}{AE} = \frac{CE}{AE} + 1$]

6. आकृति 9.15 में P त्रिभुज ABC के अभ्यंतर (interior) में एक बिन्दु है, DE ∥ AB और EF ∥ BC है।

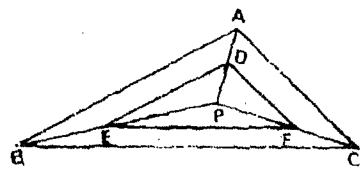
(i) क्या $\frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB}$ है ?

(ii) क्या $\frac{PE}{EB} = \frac{PF}{FC}$ है ?

(iii) क्या $\frac{PD}{DA} = \frac{PF}{FC}$ है ?

(iv) क्या FD ∥ CA है ?

सकारण उत्तर दीजिए।



आकृति 9.15

7. तीन समांतर रेखाएँ a, b और c इस प्रकार खींचिए कि a और b के बीच की दूरी 1.5 सें० मी० तथा b और c के बीच की दूरी 2 सें० मी० है। एक तिर्यक रेखा q खींचिए जो समांतर रेखाओं को क्रमशः A, B और C पर काटे। जाँच कीजिए कि $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$ है। यह भी जाँच कीजिए कि यदि एक तिर्यक रेखा r समांतर रेखाओं को क्रमशः G, H और I पर काटे तो $\frac{GH}{HI} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$ है।

8. निम्नलिखित रेखाखंडों की रचना कीजिए जिनकी लम्बाइयाँ दी गई हैं और उन्हें दिए हुए समान भागों में बाँटिए :

(i) 5 सें० मी, 3 भागों में

(ii) 8.4 सें० मी०, 4 भागों में

(iii) 6.5 सें० मी०, 5 भागों में

9. निम्नलिखित रेखाखंडों की रचना कीजिए जिनकी लम्बाइयाँ दी गई हैं और उन्हें दिए हुए अनुपातों में विभाजित कीजिए :

(i) 7 सें० मी०, 2 : 3 : 4 अनुपात के तीन भागों में

(ii) 8 सें० मी०, 1 : 1 : 2 : 2 : 2 अनुपात के पाँच भागों में

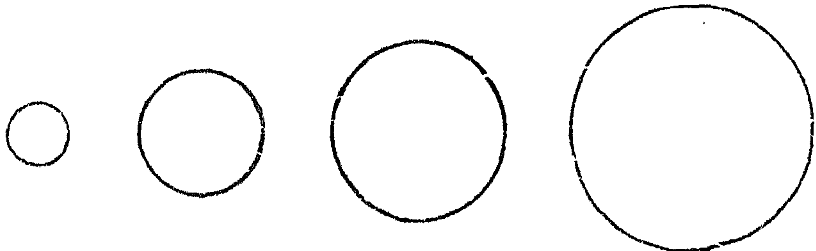
(iii) 9.6 सें० मी०, 1 : 2 : 3 : 2 अनुपात के चार भागों में

9.8 समरूपता

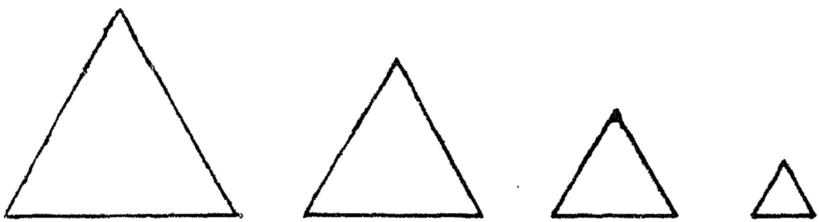
हम आकृतियों की सर्वांगसमता के विषय में पढ़ चुके हैं और हमने त्रिभुजों की सर्वांगसमता के कुछ नियम सीख लिए हैं। हमने सीखा है कि दो सर्वांगसम आकृतियों का एक ही 'आकार' (shape) और एक ही 'साइज़' होता है। प्रत्यक्ष रूप से 'साइज़' शब्द विभिन्न रेखाखंडों, कोणों की मापों, इत्यादि से सम्बन्धित है। क्योंकि दो सर्वांगसम आकृतियों को एक दूसरे के ऊपर इस प्रकार रखा जा सकता है कि वे एक दूसरे को पूरी तरह से ढक लेती हैं, अतः स्पष्ट है कि तदनुरूपी रेखाखंडों के सभी युग्म परस्पर समान होते हैं। त्रिभुजों के लिए हम सीख चुके हैं कि तदनुरूपी रेखाखंडों के केवल तीन युग्मों उदाहरणार्थ तदनुरूपी भुजाओं की समानता तदनुरूपी रेखाखडों के प्रत्येक अन्य युग्म की समानता को निश्चित बना देती है। फिर तदनुरूपी कोणों के प्रत्येक युग्म की समानता के विषय में हम स्वत : ही निष्कर्ष निकाल लेते हैं। अब हम उन आकृतियों के विषय में पढ़ेंगे जिनके आकार 'एक जैसे' हैं परन्तु उनका साइज़ समान होना आवश्यक नहीं है। ऐसी आकृतियों को **समरूप** **(similar)** कहा जाता है। यह स्पष्ट है कि दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होंगी परन्तु इसका विलोम सत्य होना आवश्यक नहीं। दूसरे शब्दों में, दो समरूप आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।

आइए कुछ ज्यामितीय आकृतियों को देखें जो प्रत्यक्ष रूप से समरूप हैं। (देखिए आकृति 9.16)

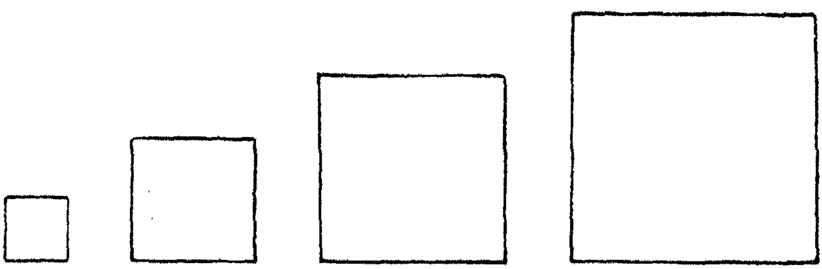
आकृति (i) में भिन्न साइज़ों के कुछ वृत्त हैं। क्या उन सब के आकार एक जैसे हैं ? क्या वे सभी समरूप हैं ?



(i)



(ii)



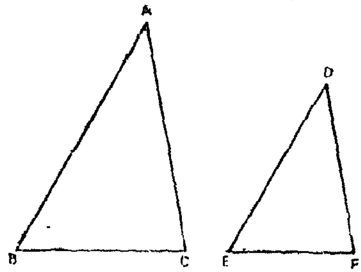
(iii)

आकृति 9.16

आकृति (ii) में भिन्न साइज़ों के कुछ समबाहु त्रिभुज हैं। क्या उन सब के आकार एक जैसे हैं ? क्या वे सभी समरूप हैं ?

आकृति (iii) में भिन्न साइजों के कुछ वर्ग हैं। क्या वे सभी समरूप हैं? स्पष्ट रूप से उपरोक्त प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 'हाँ' है।

क्या एक वृत्त और एक त्रिभुज अथवा एक त्रिभुज और एक वर्ग का आकार एक जैसा है? प्रत्यक्ष रूप से, नहीं। इन प्रश्नों के उत्तर आकृतियों पर एक दृष्टि डालने से ही मिल जाते हैं। आइए अब आकृति 9.17 के दोनों त्रिभुजों को देखें। ये त्रिभुज समरूप दिखाई देते हैं परन्तु हम निश्चित रूप से कुछ नहीं कह सकते। अतः यह आवश्यक है कि हमारे पास समरूपता की कोई उपयुक्त परिभाषा हो, जैसा कि आकृतियों की सर्वांगसमता के लिए है, और उस परिभाषा पर आधारित कुछ उपयुक्त नियम हों ताकि हम निर्णय कर सकें कि दी हुई दो आकृतियाँ समरूप हैं अथवा नहीं।



आकृति 9.17

हम सबको समरूपता की एक अन्तर्ज्ञानात्मक संकल्पना का ज्ञान है। वास्तव में प्रत्येक प्राणी में समरूपता की कोई धारणा होती है। आइए निम्न चित्रों को देखें :

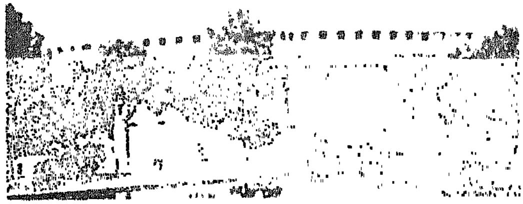


(i)

आकृति 9.18



(*ii*)



(*iii*)

आकृति 9.18

आप तुरन्त यह कहेंगे कि ये चित्र एक ही बिल्डिंग के हैं। वास्तव में ये सभी चित्र संसद भवन, नई दिल्ली के हैं। केवल अन्तर यह है कि इनके साइज़ भिन्न हैं। क्या आप यह कहेंगे कि ये तीनों चित्र आकार में समरूप हैं? हाँ, आप ऐसा ही कहेंगे। जब फोटोग्राफर भिन्न साइज़ों के चित्र बनाता है तो वह क्या करता है? प्रायः वह छोटे साइज़ की फिल्म, जिसे हम प्रायः 35 मि० मी० साइज़ कहते हैं, पर एक चित्र लेता है और फिर इसे बड़े साइज़ में बना (आवर्धित कर) लेता है। वास्तव में इसका अभिप्राय: यह है कि छोटे **चित्र के प्रत्येक रेखाखंड में एक ही अनुपात में वृद्धि होती है**। समरूपता की संकल्पना का यही सार है। हम कहते हैं कि **समान भुजाओं वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनके तदनुरूपी कोण समान हों (अर्थात् वे समानकोणिक हों) और उनकी तदनुरूपी भुजाएँ एक ही अनुपात में हों**। विशिष्ट रूप से, **दो त्रिभुज समरूप* होते हैं यदि उनके तदनुरूपी कोण समान हों और उनकी तदनुरूपी भुजाएँ एक ही अनुपात में हों**। दूसरे शब्दों में, यदि दो त्रिभुजों ABC और DEF में, $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ और $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$ तथा $\angle C=\angle F$ हो (देखिए आकृति 9.19), तो हम कहते हैं कि दोनों त्रिभुज **समरूप हैं**।

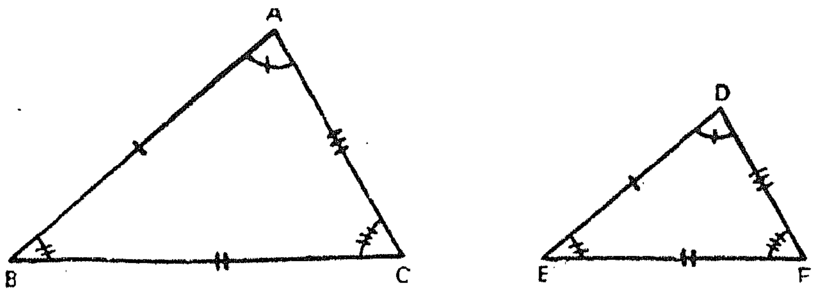
---

*हम अनुच्छेद 9.9 में देखेंगे कि यदि निम्नलिखित में से कोई भी एक प्रतिबन्ध पूरा होता है तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं:

(i) तदनुरूपी कोण समान हों,

(ii) तदनुरूपी भुजाएँ एक ही अनुपात में हों।

संकेतन में, हम इसे इस प्रकार लिखते हैं : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (जिसे त्रिभुज ABC त्रिभुज DEF के समरूप है पढ़ा जाता है)।



आकृति 9.19

टिप्पणी : जैसा कि हमने दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की अवस्था में किया था, दो त्रिभुजों की समरूपता की अवस्था में भी हमें दोनों त्रिभुजों को इस प्रकार नामांकित करना चाहिए कि एक त्रिभुज का पहला, दूसरा और तीसरा शीर्ष क्रमश: दूसरे त्रिभुज के पहले, दूसरे और तीसरे शीर्ष के संगत हो।

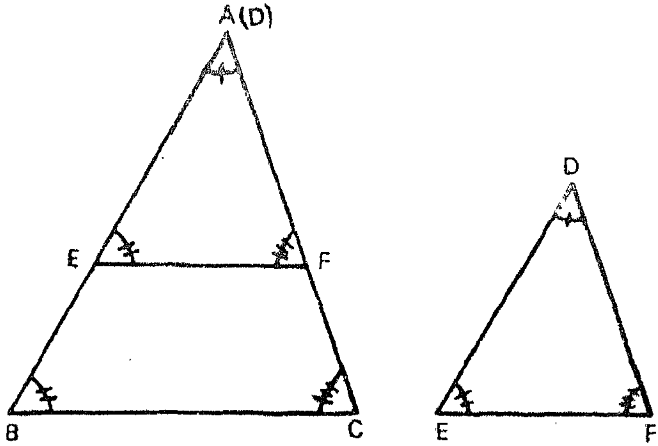
अब हम त्रिभुजों की समरूपता के कुछ नियम सीखेंगे।

9.9 त्रिभुजों की समरूपता के नियम

आइए दो त्रिभुजों ABC और DEF की रचना इस प्रकार करें कि $\angle A = \angle D = 50°$, $\angle B = \angle E = 60°$ तथा $\angle C = \angle F = 70°$ (मान लीजिए) हो।

इस प्रकार, दोनों त्रिभुज समानकोणिक हैं। (देखिए आकृति 9.20) इस आकृति में, दोनों त्रिभुजों में DEF छोटा है। यह मानते हुए कि दोनों त्रिभुज पतले गत्ते के बने हैं हम त्रिभुज DEF को उठा कर त्रिभुज ABC पर इस प्रकार रखते हैं कि कोण D कोण A पर पड़ता है और भुजाएँ DE और DF क्रमश: भुजाओं AB और AC के अनुदिश पड़ती हैं। ऐसा होना सम्भव है क्योंकि

कोण A और D समान हैं। तब E रेखाखंड AB पर और F रेखाखंड AC पर गिरेगा।



आकृति 9.20

क्योंकि $\angle AEF = \angle B = 60^\circ$ है, अत: $EF \parallel BC$ है। (क्यों ?)

अब EF त्रिभुज ABC के आधार BC के समांतर है, अत:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \quad \text{(क्यों ?)}$$

अर्थात्,

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} \qquad (1)$$

क्या आप इसी प्रकार से त्रिभुज DEF को त्रिभुज ABC पर इस प्रकार रख कर कि $\angle E$, $\angle B$ पर पड़े, देख सकते हैं कि

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} \ ? \qquad (2)$$

दोनों परिणामों को मिलाने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = \frac{DE}{AB},$$

अर्थात्, दोनों त्रिभुजों की तदनुरूपी भुजाएँ एक ही अनुपात में हैं।

उपरोक्त प्रयोग तथा तर्क स्पष्टतया किन्हीं भी दो समानकोणिक त्रिभुजों के लिए किया जा सकता है। इस प्रकार हम देखते हैं कि

दो समानकोणिक त्रिभुजों की तदनुरूपी भुजाएँ एक ही अनुपात में होती हैं।

क्योंकि यहाँ समरूपता की दी गई परिभाषा के दोनों प्रतिबन्ध पूरे हो जाते हैं, अतः दोनों त्रिभुज समरूप हैं। इसलिए, हम कहते हैं कि

दो समानकोणिक त्रिभुज समरूप होते हैं। अर्थात् यह कि **यदि दो त्रिभुजों ABC और DEF में, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ हो, तो $\triangle ABC \sim \triangle DEF$** होता है।

हम उपरोक्त गुण को **कोण-कोण-कोण** अथवा संक्षेप में AAA **समरूपता नियम (similarity rule)** कहते हैं।

टिप्पणी : क्योंकि किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है, अतः यदि हमें त्रिभुज के दो कोण दिए गए हों तो हम तीसरा कोण ज्ञात कर सकते हैं। अतः यदि दो त्रिभुजों के तदनरूपी कोणों के दो युग्म समान हों तो तीसरा युग्म स्वतः समान होगा। इस प्रकार, दोनों त्रिभुज समानकोणिक हैं। अतः AAA समरूपता नियम को निम्न प्रकार से भी व्यक्त किया जा सकता है :

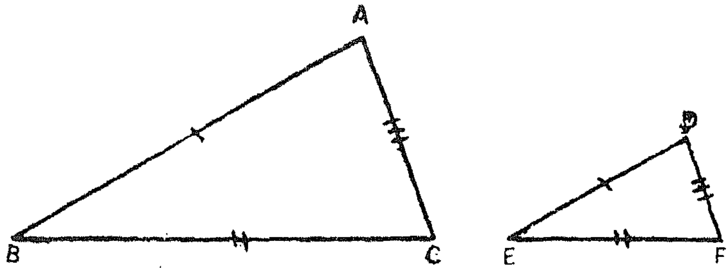
दो त्रिभुज समरूप होंगे यदि एक त्रिभुज के दो कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के समान हों।

अतः यह निर्णय करने के लिए कि दो त्रिभुज समरूप हैं अथवा नहीं **यह जाँच करना पर्याप्त है कि एक त्रिभुज के दो कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के समान हैं अथवा नहीं।** हम इसे AA **समरूपता नियम** कहते हैं।

हम नीचे दो और समरूपता नियमों का कथन दे रहे हैं। इन्हें समानुपाती अंतः खंड गुण द्वारा सिद्ध किया जा सकता है। परन्तु इनकी उपपत्ति प्रस्तुत पुस्तक की सीमा के बाहर है।

(i) यदि दो त्रिभुजों की भुजाएँ एक ही अनुपात में हों, तो त्रिभुज समानकोणिक होते हैं और इसके परिणामस्वरूप वे समरूप होते हैं। अर्थात् यह कि **यदि दो त्रिभुजों ABC और DEF में**

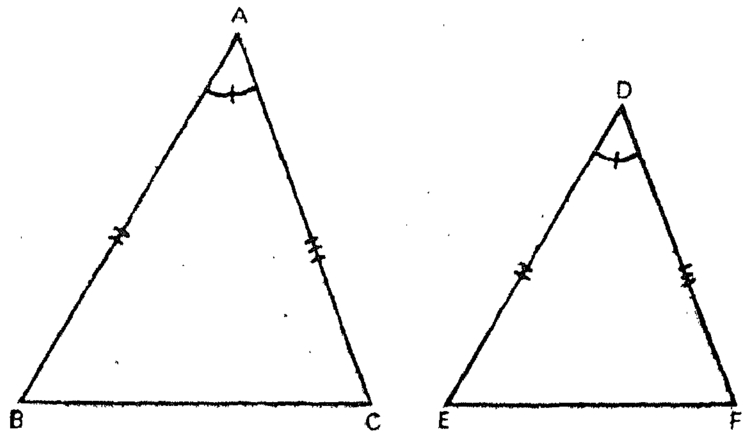
$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ हो, तो $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ होता है। (देखिए आकृति 9.21)



आकृति 9.21

हम उपरोक्त गुण को भुजा-भुजा-भुजा अथवा संक्षेप में, SSS समरूपता नियम कहते हैं।

(ii) यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के समान हो और इन कोणों को अंतर्निहित करने वाली भुजाएं एक ही अनुपात में हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।



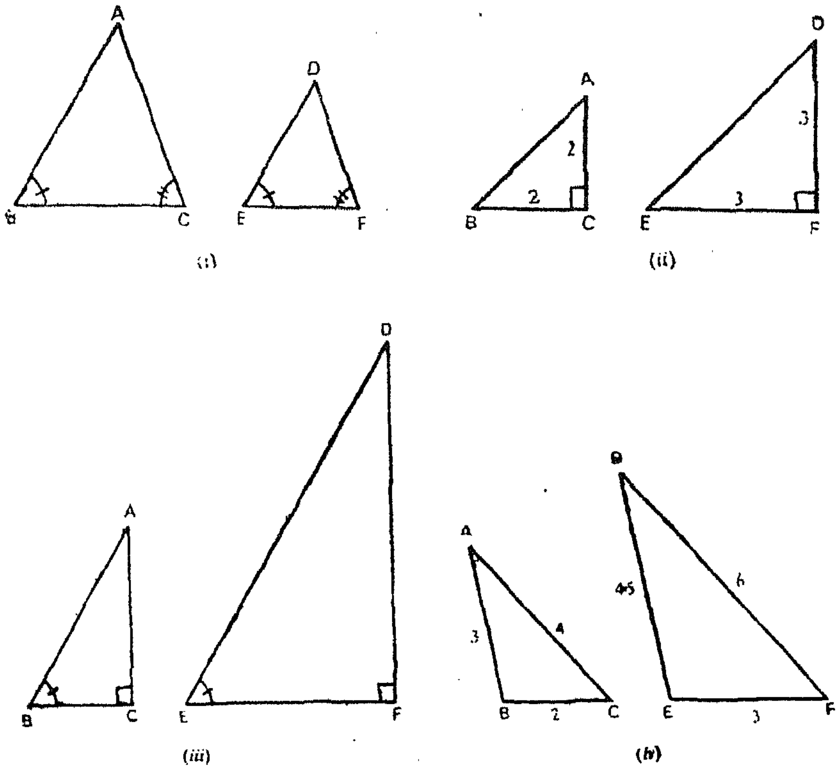
आकृति 9.22.

अर्थात् यह कि यदि दो त्रिभुजों ABC और DEF में, $\angle A = \angle D$ और $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ हो, तो $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ होता है। (देखिए आकृति 9.22)

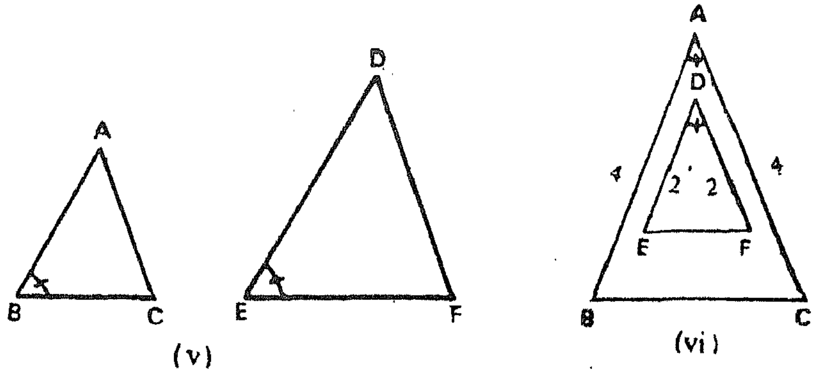
हम इस गुण को भुजा-कोण-भुजा अथवा संक्षेप में SAS समरूपता नियम कहते हैं।

प्रश्नावली 9.3

1. आकृति 9.23 में, त्रिभुजों के छः युग्म दिए गए हैं जिनके समान कोणों को एक ही तरह से अंकित किया गया है। निर्णय कीजिए कि क्या दी गई सूचना यह निर्धारित करने के लिए पर्याप्त है कि त्रिभुजों का प्रत्येक युग्म समरूप है। यदि ऐसा है तो उस समरूपता नियम का नाम बताइए जिसका आप प्रयोग कर रहे हैं। यदि नहीं तो बताइए कि समरूपता को निश्चित करने के लिए और किस सूचना की आवश्यकता है।

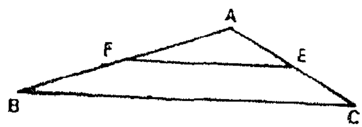


आकृति 9.23



आकृति 9.23

2. आकृति 9.24 में, F और E क्रमशः भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदु हैं।



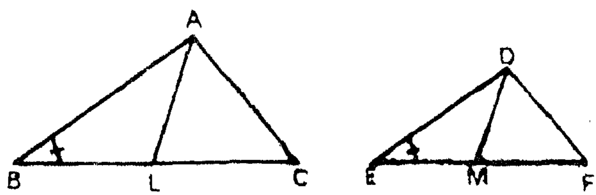
आकृति 9.24

(i) क्या $\triangle AFE \sim \triangle ABC$ है ?

(ii) क्या $FE = \frac{1}{2}$ BC है ? (प्रश्नावली 9.2 का प्रश्न 3 भी देखिए।)

सकारण उत्तर दीजिए।

3. आकृति 9.25 में, AL और DM क्रमशः त्रिभुजों ABC और DEF की माध्यिकाएँ हैं तथा $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है।



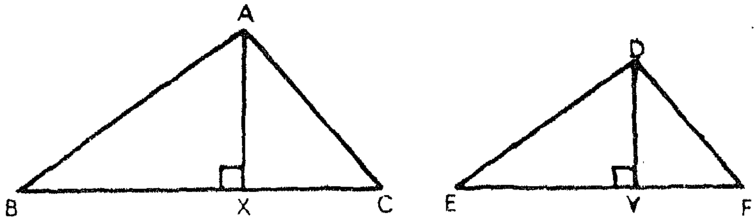
आकृति 9.25

(i) क्या $\triangle ABL \sim \triangle DEM$ है ?

(ii) क्या $\frac{AL}{DM}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ है ?

सकारण उत्तर दीजिए।

4. आकृति 9.26 में, AX और DY क्रमशः त्रिभुजों ABC और DEF के शीर्षलम्ब हैं तथा $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है।



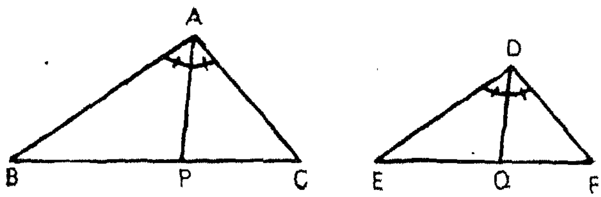
आकृति 9.26

(i) क्या $\triangle ABX \sim \triangle DEY$ है ?

(ii) क्या $\frac{AX}{DY}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ है ?

सकारण उत्तर दीजिए।

5. आकृति 9.27 में, AP और DQ क्रमशः त्रिभुजों ABC और DEF के $\angle A$ और $\angle D$ के समद्विभाजक हैं तथा $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है।



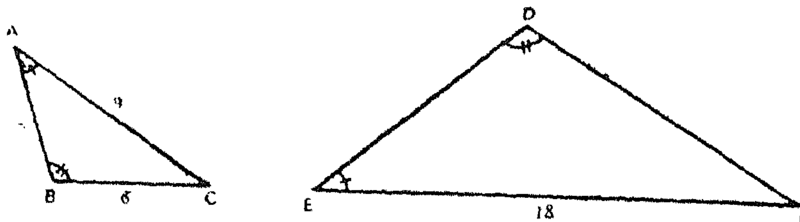
आकृति 9.27

(i) क्या $\triangle ABP \sim \triangle DEQ$ है ?

(ii) क्या $\frac{AP}{DQ}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ है ?

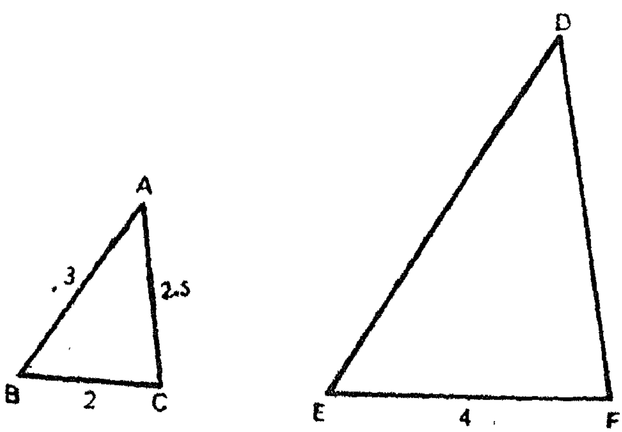
सकारण उत्तर दीजिए।

6. आकृति 9.28 में, $\angle B = \angle D$ और $\angle A = \angle E$ है। $\triangle$ DEF की भुजाओं DE और DF की लम्बाइयाँ ज्ञात कीजिए।



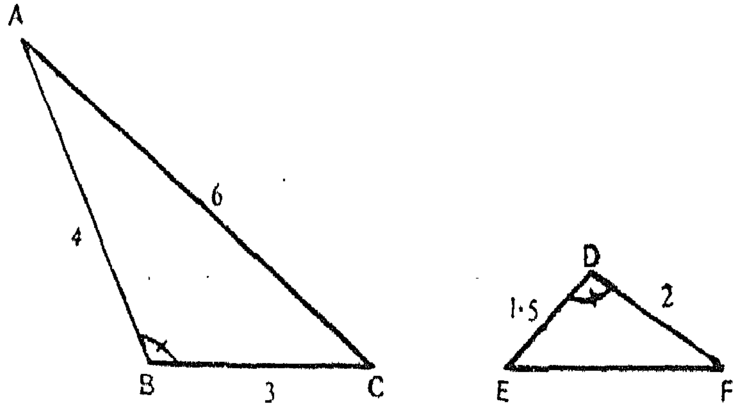
आकृति 9.28

7. आकृति 9.29 में, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ है। $\triangle$ DEF का परिमाप ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.29

8. आकृति 9.30 में, $\angle B = \angle D$ है। EF ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.30

मुख्य संकल्पनाएँ

- रेखाखंडों के अनुपात और समानुपात
- समान अंतः खंड गुण
- समानुपाती अंतः खंड गुण
- एक रेखाखंड को दिए हुए समान रेखाखंडों में विभाजित करना
- एक रेखाखंड को एक दिए हुए अनुपात में विभिन्न रेखाखंडों में विभाजित करना
- त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड
- त्रिभुज की एक भुजा के समांतर रेखा अन्य दो भुजाओं को एक ही अनुपात में काटती है
- त्रिभुजों की समरूपता
- AAA अथवा AA समरूपता नियम
- SSS समरूपता नियम
- SAS समरूपता नियम

एकक X

वृत्त

हम एक रेखा के एक वृत्त के साथ, एक वृत्त के एक अन्य वृत्त के साथ प्रतिच्छेदनों तथा वृत्त की स्पर्श रेखाओं के विषय में पढ़ेंगे। हम एक चाप के डिग्री माप (degree measure) और संख्या π के विषय में भी अध्ययन करेंगे।

10.1 पुनरावलोकन

आप वृत्तों से पहले से ही परिचित हैं। अपनी पिछली कक्षाओं से आपको निम्नलिखित संकल्पनाओं/परिणामों का पुनरावलोकन करना चाहिए :

वृत्त : केन्द्र, त्रिज्या, व्यास, परिधि, जीवा, चाप, अर्धवृत्त, वृत्त-खंड, त्रिज्यखंड।

वृत्त का अभ्यंतर और बहिर्भाग।

केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है। समदूरस्थ जीवाएँ समान होती हैं।

वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर बनाए गए कोण से दुगुना होता है।

एक ही वृत्त-खंड में बने कोण समान होते हैं।

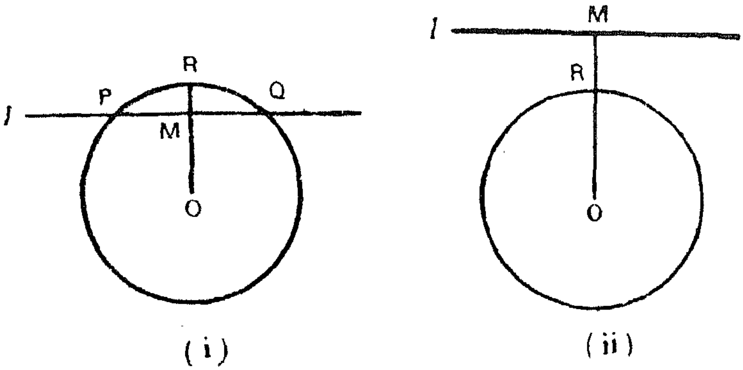
एक अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।

अब हम वृत्तों के विषय में कुछ और सीखेंगे।

10.2 एक वृत्त और एक रेखा का प्रतिच्छेदन

आइए त्रिज्या r और केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचें तथा एक रेखा *l* खींचें जो किसी भी स्थिति में हो।

ऐसी दो सम्भव स्थितियाँ आकृतियों 10.1 (i) और 10.1 (ii) में दिखाई गई हैं।



आकृति 10.1

आकृति (i) में, रेखा *l* वृत्त को दो बिंदुओं P और Q में काटती है, प्रतिच्छेद करती है अथवा मिलती है। ऐसी रेखा वृत्त का एक छेदक (secant) कहलाती है। इस रेखा का कुछ भाग वृत्त के अभ्यंतर में स्थित है। PQ वृत्त की एक जीवा है। आइए OM ⊥ PQ खींचें। मान लीजिए बढ़ाई गई OM वृत्त को R पर मिलती है। तब M, PQ का मध्य-बिंदु है (क्यों ?) तथा OR वृत्त की त्रिज्या है। साथ ही,

$$OM < OR = r,$$

अर्थात् जीवा PQ अथवा रेखा *l* की वृत्त के केन्द्र O से दूरी वृत्त की त्रिज्या से कम है। इस प्रकार **यदि कोई रेखा एक वृत्त को दो बिंदुओं में काटती है, तो वृत्त के केन्द्र से उसकी दूरी वृत्त की त्रिज्या से कम होती है।**

आकृति (ii) में, रेखा *l* वृत्त से कहीं भी नहीं मिलती। यह पूर्ण रूप से वृत्त के बाहर है। आइए, OM ⊥ *l* खींचें जो वृत्त को R पर मिलती है। M कहाँ

पर स्थित हैं ? स्पष्ट रूप से यह वृत्त के बहिर्भाग में स्थित है। साथ ही, हम देखते हैं कि

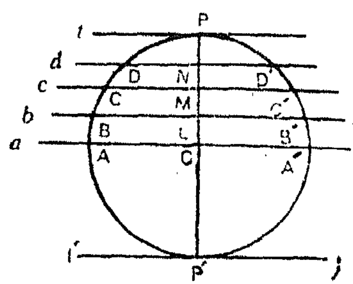
$$OM > OR = r \text{ है ।}$$

इस प्रकार, यदि कोई रेखा वृत्त को कहीं भी नहीं काटती तो वृत्त के केन्द्र से उसकी दूरी वृत्त की त्रिज्या से अधिक होती है।

10.3 वृत्त की स्पर्श रेखा

अनुच्छेद 10.2 में लिए गए एक वृत्त और एक रेखा की दो सापेक्षिक स्थितियों के अतिरिक्त एक तीसरी स्थिति भी है जब यह रेखा वृत्त के सापेक्ष एक विशेष स्थिति में होती है।

आइए, निम्न प्रयोग करें। आइए केन्द्र O और त्रिज्या r के साथ एक वृत्त की रचना करें। आइए कुछ समांतर छेदक a, b, c, d, इत्यादि खींचें जो वृत्त को क्रमश: A, A′; B, B′; C, C′; D, D′; इत्यादि में काटें। छेदक a वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है जब कि दूसरे छेदकों को केन्द्र से क्रमश: बढ़ती हुई दूरियों पर खींचा गया है। आइए, OL ⊥ b खींचें। तब OL सभी छेदकों पर लम्ब है। (क्यों ?) मान लीजिए बढ़ाई गई OL छेदकों c, d, इत्यादि को क्रमश: बिन्दुओं M, N, इत्यादि पर और वृत्त को P पर काटती है।



आकृति 10.2

पुन: L, M, N, इत्यादि जीवाओं BB′, CC′, DD′, इत्यादि के मध्य-बिंदु हैं। (क्यों ?) (देखिए आकृति 10.2)

अब जैसे जैसे जीवाओं BB′, CC′, DD′, इत्यादि की दूरियाँ केन्द्र से बढ़ती जाती हैं, उनकी लम्बाइयों के विषय में आप क्या देख रहे हैं ? क्या वे क्रमश: कम नहीं होती जा रही हैं ?

तब क्या होता है जब यह दूरी लगभग r के समान होती है ? क्या तदनुरूपी छेदक द्वारा काटी गई जीवा बहुत अधिक छोटी नहीं हो जाती ?

तब क्या होता है जब छेदक की केन्द्र से दूरी ठीक r के समान हो जाती है ? तब जीवा के दो अंत-बिंदु संपाती हो जाते हैं और इसीलिए इसकी लम्बाई शून्य हो जाती है। अंत-बिंदु किस बिंदु पर संपाती होंगे ? स्पष्ट रूप से P पर। (क्यों ?) इस विशेष छेदक को आकृति 10.2 में t द्वारा अंकित किया गया है। यह वृत्त को केवल एक बिंदु अर्थात् P पर मिलती है। ऐसी विशेष छेदक को वृत्त की स्पर्श रेखा (**tangent**) कहा जाता है। P को वृत्त के साथ स्पर्श रेखा का स्पर्श बिंदु (**point of contact**) कहा जाता है। इस प्रकार,

वह रेखा जो वृत्त को केवल एक ही बिंदु पर **मिलती है, वृत्त की स्पर्श** रेखा कहलाती है। जिस बिंदु पर वह मिलती है उसे **वृत्त के साथ स्पर्श रेखा का स्पर्श बिंदु कहा जाता है।**

हम t को **बिंदु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा** कहते हैं। हम यह भी कहते हैं कि स्पर्श रेखा वृत्त को **स्पर्श बिंदु पर स्पर्श करती है**। यदि हम O के दूसरी ओर O से बढ़ती हुई दूरियों पर छेदक खींचें जैसा कि आकृति 10.2 में है, तो क्या होगा ? हम इन छेदकों के समांतर एक अन्य स्पर्श रेखा t′ प्राप्त करेंगे जो वृत्त को बिंदु P′ पर स्पर्श करेगी। यह बिंदु P′, बिन्दु P से होकर खींचे गए व्यास का दूसरा सिरा है। (क्यों ?)

उपरोक्त चर्चा से हमें स्पर्श रेखाओं के दो अन्य गुणों का भी ज्ञान होता है जो निम्न हैं :

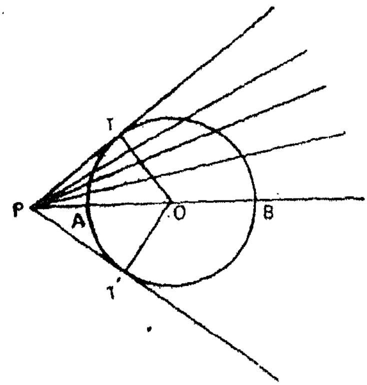
(i) **एक वृत्त की स्पर्श रेखा की उसके केन्द्र से दूरी वृत्त की त्रिज्या के समान होती है।**

(ii) **एक वृत्त की स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से होकर खींची गई वृत्त की त्रिज्या पर लम्ब होती है।**

10.4 किसी बिंदु से वृत्त को स्पर्श रेखाओं की संख्या

(i) जब वह बिंदु वृत्त के बाहर है.

आइए केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचें और वृत्त के बाहर कोई बिंदु P लें। फिर, P और O से होकर जाता हुआ एक छेदक खींचें जो वृत्त को बिंदुओं A और B पर मिले। (देखिए आकृति 10.3) आइए एक रेखा को जो आरम्भ में PAB के संपाती है, P के चारों ओर वामावर्त दिशा में वृत्त के छेदक के रूप में घुमाएँ। जैसे-जैसे यह छेदक घूमता है, वृत्त के साथ इस छेदक के प्रतिच्छेद बिंदुओं का क्या होगा ? क्या वे वृत्त पर एक दूसरे की ओर अग्रसर होते हैं ? हाँ, ऐसा ही होता है और एक ऐसी अवस्था आती है जब वे वृत्त पर एक बिंदु T पर संपाती हो जाते हैं। इस अवस्था के पश्चात् घूमती हुई रेखा वृत्त का प्रतिच्छेदन करना समाप्त कर देती है। इस घूमती हुई रेखा का उस अवस्था में क्या होता है जब यह वृत्त को एक मात्र बिंदु T पर मिलती है ? यह T पर स्पर्श रेखा बन जाती है ? इस प्रकार हमें P से होकर जाती हुई एक स्पर्श रेखा PT प्राप्त होती है।



आकृति 10.3

आइए घूमती हुई रेखा को पुन: PAB की स्थिति से प्रारम्भ करके दक्षिणावर्त दिशा में घुमाएँ। एक बार फिर हम उस अवस्था पर पहुँचते हैं जब यह रेखा वृत्त को केवल एक ही बिंदु T′ पर मिलती है और इसके पश्चात् वृत्त पर नहीं मिलती। PT′, P से होकर जाने वाली वृत्त की एक अन्य स्पर्श रेखा है।

क्या हम P से होकर जाने वाली वृत्त की एक तीसरी स्पर्श रेखा प्राप्त कर सकते हैं ? स्पष्ट रूप से नहीं। इस प्रकार, हम देखते हैं कि

वृत्त के बाहर किसी बिंदु से होकर वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

आइए वृत्त की दोनों स्पर्श रेखाओं तथा स्पर्श बिंदुओं से होकर खींची गई त्रिज्याओं से बनी आकृति के कुछ गुणों को देखें। (देखिए आकृति 10.3)

आइए T और T′ से O को मिलाएँ। तब

$OT \perp PT$ तथा $OT' \perp PT'$ (क्यों ?)

अब, आइए त्रिभुजों POT और POT′ पर विचार करें। हम देखते हैं कि

$PO = PO$

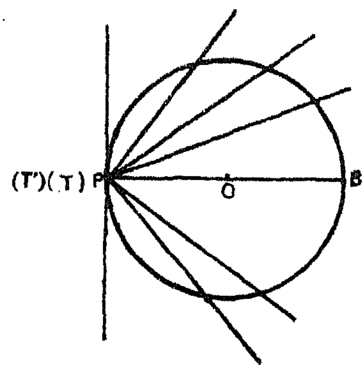
$OT = OT' =$ त्रिज्या

तथा, $\angle PTO = \angle PT'O = 90°$ (क्यों ?)

इस प्रकार, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। किस नियम द्वारा ? अतः उनकी तीसरी भुजाएँ समान हैं।

अर्थात्, $PT = PT'$

लम्बाई PT अथवा PT′, P से वृत्त पर **स्पर्श रेखा की लम्बाई** कहलाती है। रेखाखंडों PT और PT′ को कभी-कभी **स्पर्श रेखाखंड (tangent segments)** भी कहा जाता है। अतः हम कह सकते हैं कि **वृत्त के बाहर किसी बिंदु से वृत्त पर खींचे गए दो स्पर्श रेखाखंड, अथवा संक्षेप में स्पर्श रेखाएँ, समान होती हैं।**



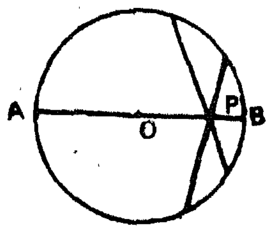
आकृति 10.4

(ii) जब वह बिंदु वृत्त पर स्थित है

आइए उपरोक्त प्रयोग को उस अवस्था के लिए दोहराएँ जब बिंदु P वृत्त पर स्थित है। तब आकृति 10.3 का बिंदु A स्वयं P, पर होगा। क्या आप देख सकते हैं कि जब यह घूमती हुई रेखा PO पर लम्ब होगी तब वह वृत्त पर स्पर्श रेखा हो जाएगी ? (देखिए आकृति 10.4) इस अवस्था में, T और T′ भी P से संपाती हो जाएँगे और **वृत्त की केवल एक ही स्पर्श रेखा होगी**, अर्थात् वृत्त की P पर स्पर्श रेखा।

(iii) जब वह बिंदु वृत्त के अन्दर स्थित है

मान लीजिए कि बिंदु P वृत्त के अन्दर स्थित है, जैसा कि आकृति 10.5 में दिखाया गया है। आइए P से होकर अनेक छेदक खींचें।



आकृति 10.5

क्या हम कोई ऐसा छेदक खींच सकते हैं जो वृत्त को दो बिंदुओं पर नहीं मिलता ? नहीं । इस प्रकार, वृत्त के अन्दर स्थित किसी बिंदु से होकर वृत्त की कोई स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती।

10.5 स्पर्श रेखाओं की रचना

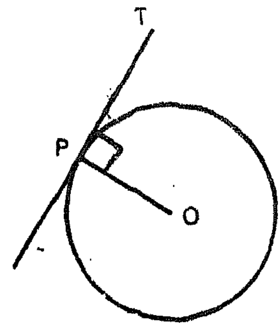
10.5.1 वृत्त पर स्थित किसी बिंदु पर वृत्त की स्पर्श रेखा खींचना

अनुच्छेद 10.3 का गुण (ii) हमें वृत्त पर स्थित किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा खींचने में समर्थ बनाता है । हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : केन्द्र O मानकर और दी हुई त्रिज्या लेकर हम एक वृत्त खींचते हैं ।

चरण 2 : हम वृत्त पर एक बिंदु P लेते हैं और O तथा P को मिलाते हैं ।

चरण 3 : P पर, हम $PT \perp OP$ खींचते हैं । (देखिए आकृति 10.6)



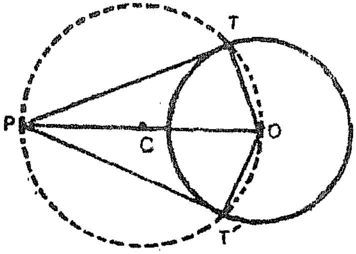
आकृति 10.6

तब PT, P पर वृत्त की वाँछित स्पर्श रेखा है । (क्यों ?)

10.5.2 वृत्त के बाहर स्थित किसी बिंदु से वृत्त की स्पर्श रेखाएँ खींचना

आइए मान लें कि हमें 1.5 सें० मी० त्रिज्या वाले एक वृत्त के बाहर उसके केन्द्र से 4 सें० मी० दूरी पर स्थित एक बिन्दु से वृत्त की स्पर्श रेखाएँ खींचनी हैं । हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम एक रेखाखंड PO=4 सें० मी० की रचना करते हैं ।



आकृति 10.7

चरण 2 : O को केन्द्र मानकर और 1.5 सें० मी० त्रिज्या लेकर हम एक वृत्त खींचते हैं।

[अब हमें दिया हुआ वृत्त और उसके बाहर स्थित एक बिंदु P प्राप्त हो गया है।]

चरण 3 : हम PO को C पर समद्विभाजित करते हैं।

चरण 4 : C को केन्द्र मानकर और CO को त्रिज्या लेकर हम एक वृत्त खींचते हैं जो चरण 2 में खींचे गए वृत्त को बिंदुओं T और T' पर काटता है। (देखिए आकृति 10.7)

[यह वृत्त P से होकर भी जाएगा। (क्यों ?)]

चरण 5 : हम P और T तथा P और T' को मिलाते हैं।

तब, PT और PT' वाँछित स्पर्श रेखाएँ हैं। (क्यों ?) इस गुण को याद कीजिए कि **'एक अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है'**। क्या इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\angle PTO = \angle PT'O = 90°$?

प्रश्नावली 10.1

1. कोई रेखा एक वृत्त को निम्न अवस्थाओं में कब मिलती है ?

(i) किसी बिंदु पर नहीं

(ii) केवल एक बिंदु पर

(iii) दो बिंदुओं पर

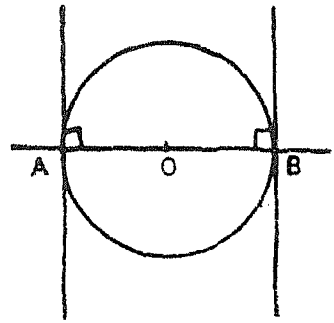
2. कब कोई रेखा

(i) एक वृत्त का छेदक होती है ?

(ii) एक वृत्त की स्पर्श रेखा होती है ?

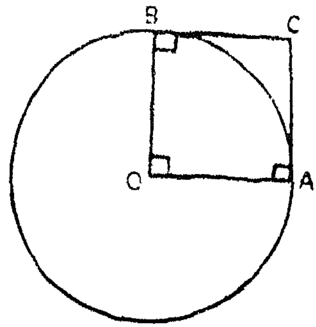
क्या एक वृत्त की जीवा उसका छेदक होती है ?

3. O को केन्द्र मानकर और 1.5 सें० मी० त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए। एक व्यास AOB खींचिए और A तथा B पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए। (देखिए आकृति 10.8) क्या ये स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं? सकारण उत्तर दीजिए।
हम देखते हैं कि एक व्यास के अंत-बिंदुओं पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।



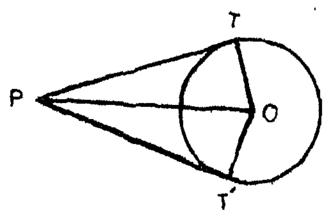
आकृति 10.8

4. O को केन्द्र मानकर और 2 सें० मी० त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए। वृत्त पर दो बिंदु A और B इस प्रकार लीजिए कि $\angle AOB = 90°$ हो। A और B पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए और मान लीजिए कि वे C पर मिलती हैं। (देखिए आकृति 10.9) क्या OACB एक वर्ग है? सकारण उत्तर दीजिए।



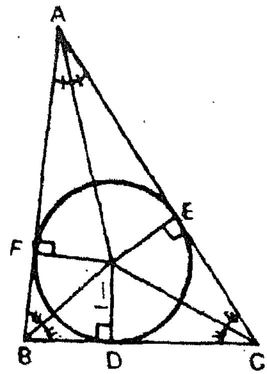
आकृति 10.9

5. आकृति 10.10 में, PT और PT' दो स्पर्श रेखाएँ हैं जो बिंदु P से O केन्द्र वाले वृत्त पर खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि PO दोनों कोणों TPT' और TOT' को समद्विभाजित करती है।



आकृति 10.10

6. एक त्रिभुज ABC लीजिए। इसके कोणों के समद्विभाजक खींचिए और मान लीजिए कि वे बिंदु I पर संगामी (मिलते) हैं। क्रमशः BC, CA और AB पर लम्ब ID, IE और IF खींचिए। (देखिए आकृति 10.11) जाँच कीजिए कि ID=IE=IF है। (प्रश्नावली 8.1 का प्रश्न 5 भी देखिए।)



आकृति 10.11

I को केन्द्र मानकर और ID को त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए। क्या यह भुजाओं BC, CA और AB को क्रमशः D, E और F पर स्पर्श करता है? सकारण उत्तर दीजिए।

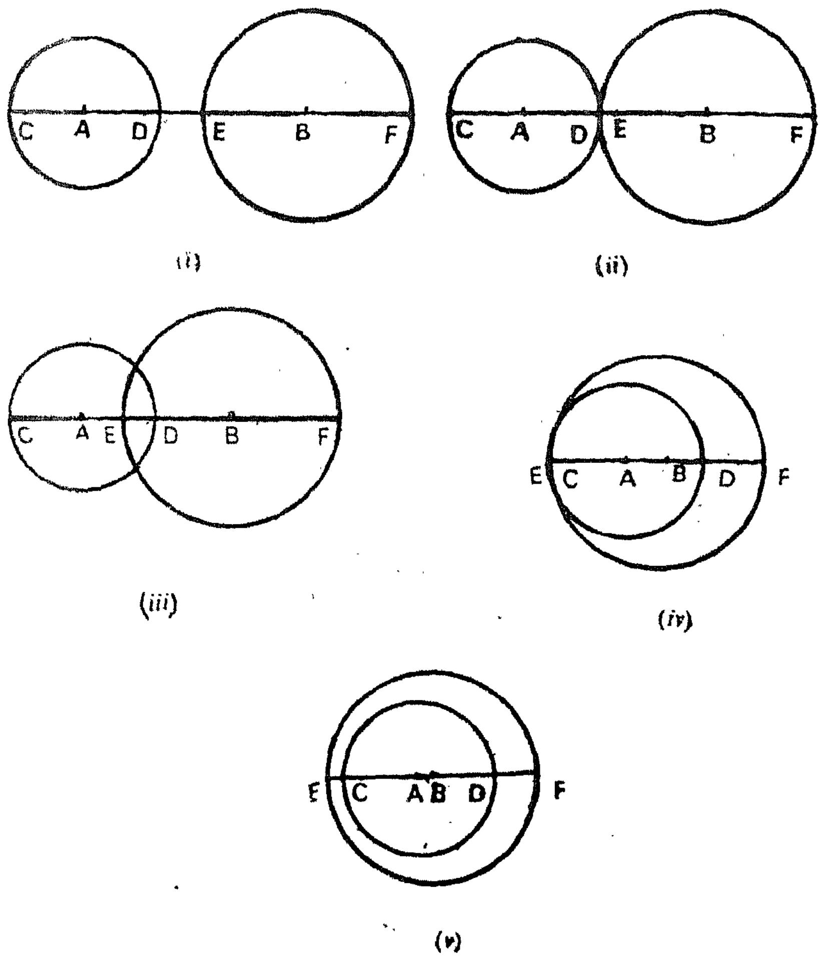
हम देखते हैं कि **I को केन्द्र मानकर तथा ID त्रिज्या लेकर खींचा गया वृत्त त्रिभुज ABC की भुजाओं को D, E और F पर स्पर्श करता है।** इस वृत्त को त्रिभुज का अंतः **वृत्त (incircle)** और इसके केन्द्र को त्रिभुज का **अंतः केन्द्र (incentre)** कहा जाता है। (मिडिल स्कूलों के लिए गणित, पुस्तक II, भाग II का अनुच्छेद 13.6 भी देखिए।)

7. आकृति 10.11 में, सिद्ध कीजिए कि
   (i) AE+CD=CE+AF
   (ii) BD+CE=BF+CD
   (iii) AF+BD=BF+AE

8. त्रिज्या 5 सें० मी० का एक वृत्त खींचिए और केन्द्र से 7 सें० मी० की दूरी पर एक बिंदु P लीजिए। बिंदु P से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए। दोनों स्पर्श रेखाओं को मापिए। क्या वे समान हैं?

10.6 दो वृत्तों का प्रतिछेदन

आइए 2 सें० मी० और 3 सें० मी० त्रिज्या के दो वृत्त खींचे जिनके केन्द्र क्रमशः A और B हैं जैसा कि आकृति 10.12 में दिखाया गया है। बहुधा वृत्तों के नाम उनके केन्द्रों के आधार पर रख दिए जाते हैं। हम इन दोनों वृत्तों



आकृति 10.12

को क्रमशः वृत्त A और वृत्त B कहेंगे । रेखाखंड AB की लम्बाई दोनों वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी है । रेखा AB उनकी केन्द्र रेखा (line of centres) कहलाती है । मान लीजिए कि यह केन्द्र रेखा वृत्तों को क्रमशः बिन्दुओं C, D और E, F में काटती है । CD वृत्त A का और EF वृत्त B का एक व्यास है । पाँच विभिन्न स्थितियाँ जिनमें ये दो वृत्त खींचे जा सकते हैं, आकृतियों 10.12 (i)—(v) में दिखाई गई हैं ।

आकृति (i) में, प्रत्येक वृत्त एक दूसरे के बहिर्भाग में स्थित है और दोनों में कोई बिंदु उभयनिष्ठ नहीं है । दूसरे शब्दों में, वे परस्पर कहीं भी नहीं काटते । क्या दूरी AB त्रिज्याओं AD और EB के योग से अधिक है ? हाँ, स्पष्ट रूप से ऐसा है । इस प्रकार हम देखते हैं कि

यदि दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के योग से अधिक है, तो दोनों वृत्त एक दूसरे के बाहर स्थित होते हैं और परस्पर कहीं नहीं काटते ।

आकृति (ii) में, विन्दु D औद E संपाती हैं और केवल एक ही बिंदु अर्थात् D अथवा E दोनों वृत्तों में उभयनिष्ठ बिंदु है । अब केन्द्रों के बीच की दूरी क्या है ? क्या यह उनकी त्रिज्याओं के योग के बराबर है ? हाँ । हम कहते हैं कि दोनों वृत्त एक दूसरे को बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं और उनके उभयनिष्ठ बिन्दु को स्पर्श बिंदु कहा जाता है । इस प्रकार हम देखते हैं कि

यदि दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के योग के बराबर हो, तो दोनों वृत्त एक दूसरे को केवल एक ही बिंदु पर काटते हैं और परस्पर बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं ।

आकृति (iii) में, दोनों वृत्त एक दूसरे को दो भिन्न बिंदुओं में काटते हैं । दूरी AB के विषय में आप क्या सोचते हैं ? अब यह दूरी उनकी त्रिज्याओं के योग से कम है परन्तु उनके अंतर से अधिक है । इस प्रकार हम देखते हैं कि

यदि दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के योग से कम परन्तु उनके अन्तर से अधिक हो, तो वे एक दूसरे को दो भिन्न बिंदुओं में काटते हैं ।

आकृति (iv) में, बिन्दु C और E संपाती हो गए हैं और वृत्त A केवल बिंदु C को छोड़ कर पूरी तरह से वृत्त B के अभ्यंतर में स्थित है। **दोनों वृत्त एक दूसरे को एक ही बिंदु अर्थात् C अथवा E में काटते** हैं। हम कहते हैं **कि दोनों वृत्त एक दूसरे को अंतः रूप से स्पर्श करते हैं**। दूरी AB के विषय में आप क्या सोचते हैं ? क्या अब यह वृत्तों की त्रिज्याओं के अंतर के बराबर है ? हाँ। इस प्रकार हम देखते हैं कि

यदि दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के अंतर के बराबर हो, तो दोनों वृत्त परस्पर अंतः रूप से स्पर्श करते हैं।

अंत में, आकृति (v) में वृत्त A पूरी तरह से वृत्त B के अभ्यंतर में स्थित है और दोनों वृत्तों में कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं है। अब दूरी AB के विषय में आप क्या सोचते हैं? क्या यह त्रिज्याओं के अन्तर से कम है ? हाँ। इस प्रकार हम देखते हैं कि

यदि दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के अन्तर से कम हो, तो वे एक दूसरे को कहीं भी नहीं काटते और छोटा वृत्त पूरी तरह से बड़े वृत्त के अभ्यंतर में स्थित होता है।

अब हम दोनों वृत्तों को कितनी ही विभिन्न स्थितियों में खींच सकते हैं। हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में हम उपरोक्त परिणामों में से कोई एक परिणाम प्राप्त करेंगे। हम अपने परिणामों को संक्षिप्त रूप से निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं:

कोई दो असमान वृत्त या तो

(i) **एक दूसरे को कहीं भी नहीं काटते,**

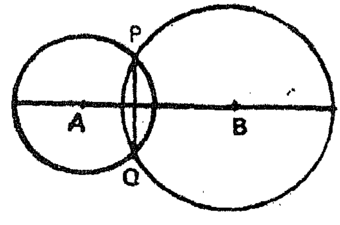
या (ii) **जब वे एक दूसरे को बाह्य अथवा अंतः रूप से स्पर्श करें तो वे परस्पर एक ही बिंदु पर काटते हैं,**

या (iii) **वे एक दूसरे को दो भिन्न बिंदुओं में काटते हैं।**

जब दोनों वृत्त समान त्रिज्याओं के हों तब क्या होगा ?

10.7 उभयनिष्ठ जीवा और उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा

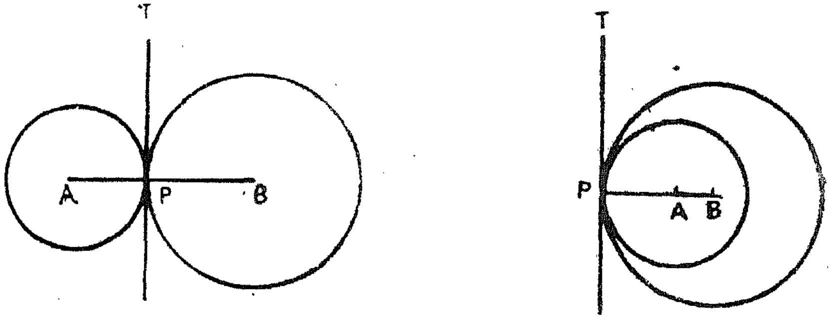
आइए आकृति 10.12 का पुनः अवलोकन करें। (iii) में, हम देखते हैं कि वृत्त एक दूसरे को दो भिन्न बिंदुओं में काटते हैं। आइए इन बिंदुओं के नाम P और Q रखें। (देखिए आकृति 10.13) फिर, आइए P और Q को मिलाएँ। हम देखते हैं कि रेखाखंड



आकृति 10.13

PQ दोनों वृत्तों की जीवा है। अतः इसे इन दोनों वृत्तों की **उभयनिष्ठ जीवा** (**common chord**) कहते हैं।

(ii) और (iv) में, हम देखते हैं कि दोनों वृत्त एक दूसरे को केवल एक बिंदु पर काटते हैं। आइए इस बिंदु का नाम P रखें और P पर इनमें से एक वृत्त, उदाहरणार्थ, वृत्त A की स्पर्श रेखा PT खींचें। (देखिए आकृति

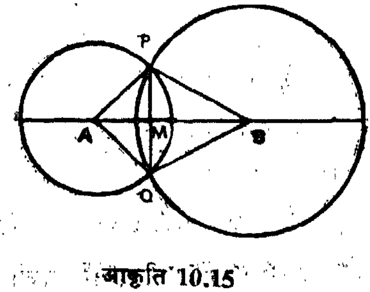


आकृति 10.14

10.14) हम देखते हैं कि PT वृत्त B की भी स्पर्श रेखा है। अतः इसे दोनों वृत्तों की **उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा** (**common tangent**) कहा जाता है। हम देखते हैं कि AB ⊥ PT है। दूसरे शब्दों में, **दोनों वृत्तों की केन्द्र रेखा उनके स्पर्श बिंदु पर खींची गई उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।**

अब आकृति 10.13 में, आइए A और B को P और Q से मिलाएँ। (देखिए आकृति 10.15)

क्या आप देखते हैं कि AP=AQ और BP=BQ है ? (क्यों ?) इस प्रकार A, P और Q से समदूरस्थ है। अतः वह P और Q की सममिति अक्ष (axis of symmetry) पर स्थित है। इसी प्रकार, B भी P और Q की सममिति अक्ष पर स्थित है। अतः AB,



आकृति 10.15

P और Q की सममिति अक्ष है। दूसरे शब्दों में AB, PQ का लम्ब समद्विभाजक है। अर्थात् यदि AB, PQ को M पर काटता है, तो M उभयनिष्ठ, जीवा PQ का मध्य-बिंदु है।

अतः, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

यदि दो वृत्त परस्पर काटते हैं, तो उनकी केन्द्र रेखा उनकी उभयनिष्ठ जीवा का लम्ब समद्विभाजक होती है।

टिप्पणी : क्या आप वृत्तों की सममिति से यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं ? आपको याद होगा कि एक वृत्त प्रत्येक व्यास के सापेक्ष सममित होता है और दो वृत्तों की केन्द्र रेखा में दोनों वृत्तों के एक-एक व्यास सम्मिलित होते हैं। दूसरे शब्दों में, **दो वृत्तों की केन्द्र रेखा उनकी उभयनिष्ठ सममिति अक्ष होती है।**

प्रश्नावली 10.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक में दो वृत्तों की त्रिज्याएँ a और b तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी d सेन्टीमीटर में दी गई हैं। बताइए कि क्या दो वृत्त एक दूसरे को काटते हैं, स्पर्श करते हैं, संपाती हैं अथवा कहीं भी नहीं काटते। सकारण उत्तर दीजिए।

   (i) $a=3.2, b=2.5, d=6$ (ii) $a=2.7, b=2, d=3$

   (iii) $a=3, b=2, d=5$ (iv) $a=2, b=2, d=3$

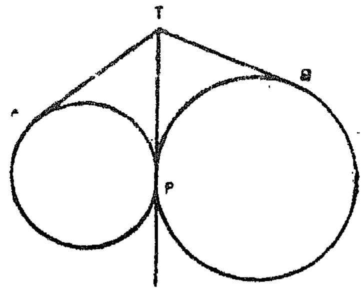
   (v) $a=2.9, b=1.7, d=1.2$ (vi) $a=1.5, b=2, d=5$

   (vii) $a=2, b=2, d=0$ (viii) $a=1.5, b=2.3, d=0$

   (ix) $a=1.8, b=2.7, d=3$ (x) $a=1.2, b=3, d=1.5$

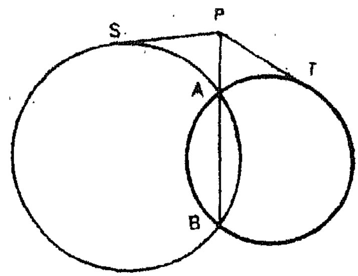
2. आकृति 10.16 में, P पर दोनों वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा पर T

कोई बिन्दु है और TA तथा TB, बिंदु T से दोनों वृत्तों पर खींची गई दो अन्य स्पर्श रेखाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि TA=TB है।



आकृति 10.16

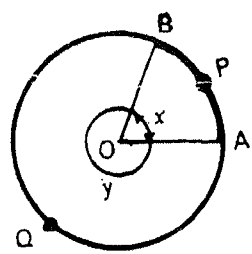
3. बिंदुओं A और B पर परस्पर काटते हुए दो वृत्त खींचिए। उस रेखा पर जिसमें उभयनिष्ठ जीवा AB स्थित है, कोई बिंदु P लीजिए और इससे दोनों वृत्तों पर स्पर्श रेखाएँ PS और PT खींचिए जैसा कि आकृति 10.17 में दिखाया गया है। PS और PT को मापिए। क्या ये बराबर हैं ?



आकृति 10.17

10.8 किसी चाप का डिग्री माप

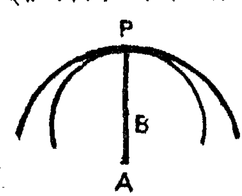
मान लीजिए दो बिंदु A और B एक वृत्त पर स्थित हैं जिसका केन्द्र O है। तब कोण x जिसका शीर्ष केन्द्र O पर है, एक **केन्द्रीय कोण (central angle)** कहलाता है। (देखिए आकृति 10.18) यह **चाप APB का केन्द्रीय कोण** भी कहलाता है। इसी प्रकार आकृति 10.18 में, y दीर्घ चाप AQB का केन्द्रीय कोण है ।



आकृति 10.18

हम रेखाखंडो के परिमाणों (magnitudes) की तुलना करना सीख चुके हैं। इस उद्देश्य के लिए हमनें लम्बाई के एक मात्रक (unit) को परिभाषित किया था और एक मापन यंत्र अंशांकित रूलर (graduated ruler) का प्रयोग किया था। इसी प्रकार कोणों के परिमाणों की तुलना करने के लिए हमने कोणों को मापने के एक मात्रक को परिभाषित किया था, अर्थात् एक समकोण को 90 समान भागों में बाँटा था जिन्हें डिग्री कहते हैं। जिस मापन यंत्र का प्रयोग किया था वह है चाँदा (protractor)। चापों के परिमाणों अथवा दूसरे शब्दों में उनकी लम्बाइयों की तुलना करना सरल कार्य नहीं है। सर्व-प्रथम एक चाप की लम्बाई क्या होती है ? पुनः इस प्रश्न का उत्तर देना भी कठिन है। हम अन्तर्ज्ञानात्मक रूप से मान लेते हैं कि एक वृत्तीय चाप की कुछ लम्बाई होती है जिसे किसी तरह मापा जा सकता है। उदाहरणार्थ, हम पतली डोरी का एक टुकड़ा ले सकते हैं और इसके एक सिरे से प्रारम्भ करके हम इसे चाप के अनुदिश रख सकते हैं और फिर चाप को एक बार ढकने के के लिए जितनी डोरी की आवश्यकता है उसकी लम्बाई माप लेते हैं। इससे हमें चाप की लम्बाई का सन्निकट माप मिल जाएगा। परन्तु ऐसा माप गणितीय रूप से संतोषजनक नहीं हो सकता क्योंकि हमें चाप का सही माप चाहिए। और फिर यह भी हो सकता है कि किन्ही कारणों से हमें इसका ठीक सन्निकटन भी प्राप्त न हो सके। उदाहरणार्थ, जब डोरी को मापने के लिए सीधा किया जाएगा तो यह कुछ खिंच भी सकती है।

पुनः, वृत्तीय चापों को मापने के लिए हम ऐसा कोई यंत्र प्राप्त नहीं कर सकते जैसा कि रेखाखंडों की लम्बाई मापने के लिए अंशांकित रूलर। क्योंकि जहाँ अंशांकित रूलर को एक रेखाखंड के ऊपर इस प्रकार रखा जा सकता है कि यह प्रत्येक स्थान पर उसके सम्पर्क में आ जाए, परन्तु विभिन्न साइज़ों के वृत्तों के चापों के लिए ऐसा नहीं किया जा सकता। उनमें झुकाव की भिन्न-भिन्न मात्रा होती है जिस कारण एक को दूसरे के ऊपर इस प्रकार नहीं रखा जा सकता कि वह प्रत्येक स्थान पर दूसरे को स्पर्श करे। अधिक से अधिक एक चाप



आकृति 10.19

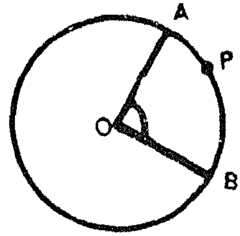
को दूसरे चाप के ऊपर इस प्रकार रखा जा सकता है कि वह दूसरे को केवल

एक बिन्दु पर स्पर्श करें जैसा कि, उदाहरणार्थ, आकृति 10.19 में बिंदु P है, जहाँ A और B दोनों वृत्तीय ~~चापों के केन्द्र~~ हैं।

एक ही वृत्त अथवा सर्वांगसम वृत्तों के चापों के परिमाणों की तुलना के लिए **चाप के डिग्री माप** की निम्न परिभाषा हमारे कार्य के लिए बहुत कुछ पर्याप्त है :

एक वृत्त के चाप का डिग्री माप उस चाप के केन्द्रीय कोण का डिग्री माप होता है।

संकेतन में, यदि APB एक वृत्त का चाप है जिसका केन्द्र O है, तो चाप APB का डिग्री माप $= \angle AOB$ में डिग्रियों की संख्या। (देखिए आकृति 10.20)

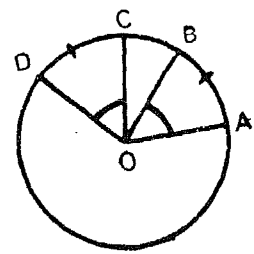


आकृति 10.20

अब हम एक चाप के डिग्री माप के कुछ गुणों को सीखेंगे जिन्हें हम चापों की तुलना करने के लिए प्रयोग कर सकते हैं। हम एक ही वृत्त के चापों को ही लेंगे।

10.9 एक चाप के डिग्री माप के कुछ गुण

मान लीजिए AB और CD एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, के दो सर्वांगसम चाप हैं। (देखिए आकृति 10.21) सर्वांगसमता से हमारा अभिप्राय यह है कि एक चाप को दूसरे चाप के साथ संपाती अवस्था में लाया जा सकता है। आइए, कल्पना करें कि चाप CD को O के चारों ओर दक्षिणावर्त दिशा में तब तक घुमाया जाता है जब तक कि बिंदु C, A के साथ संपाती न हो जाए। D का क्या होगा ? क्या यह B के साथ संपाती हो जाता है ? हम देखते हैं कि OC और OD



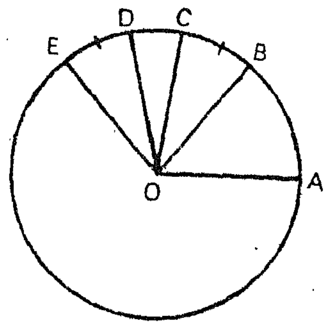
आकृति 10.21

क्रमशः OA और OB के साथ संपाती हो जाते हैं। अतः कोण AOB और

COD समान हैं । इस प्रकार, चापों AB और CD का एक ही डिग्री माप है । इस प्रकार हम देखते हैं कि

1. दो सर्वांगसम चापों का एक ही डिग्री माप होता है ।

यदि AB और BC एक वृत्त के दो चाप हों, जैसा कि आकृति 10.21 में दिखाया गया है, तो चाप AC **चापों AB और BC के योग के समान है** । यदि AB और DE दो अन्य चाप हों, जैसा कि आकृति 10.22 में दिखाया गया है, तो AB और DE के योग को परिभाषित करने के लिए हम एक चाप BC की रचना करते हैं जो DE के सर्वांगसम हो (कैसे ?)



आकृति 10.22

और फिर चाप AC को AB और DE के योग के रूप में परिभाषित करते हैं ।

अब हमें निम्न गुण प्राप्त होता है :

2. दो चापों के योग का डिग्री माप दोनों चापों के डिग्री मापों के योग के समान होता है ।

गुणों 1 और 2 से हम चापों के योगों, गुणजों, इत्यादि के डिग्री मापों के लिए उसी प्रकार कार्य कर सकते हैं जैसे कि कोणों के लिए करते हैं । यदि किसी दिए हुए चाप का डिग्री माप m है तो एक ऐसे चाप का डिग्री माप जो दिए हुए चाप का दुगुना, तिगुना, इत्यादि है, 2m, 3m, इत्यादि होगा । अधिक व्यापक रूप से, हम देखते हैं कि एक चाप का माप जो दिए हुए चाप का a गुना है, a m होता है । इस प्रकार हमें निम्न गुण प्राप्त होता है :

3. एक ही वृत्त में चापों की लम्बाइयाँ उनके डिग्री मापों के समानुपाती होती हैं ।

इस प्रकार यदि AB और CD एक ऐसे वृत्त के दो चाप हैं जिसका केन्द्र O है, तो

$$\frac{\text{चाप AB की लम्बाई}}{\text{चाप CD की लम्बाई}} = \frac{\text{केन्द्रीय } \angle AOB \text{ का माप}}{\text{केन्द्रीय } \angle COD \text{ का माप}} \quad (1)$$

एक अर्धवृत्त का केन्द्रीय कोण क्या होता है ? स्पष्ट रूप से, 180° । और पूरे वृत्त का केन्द्रीय कोण क्या होता है ? 360° । उपरोक्त सम्बन्ध में, यदि हम CD के स्थान पर वृत्त की परिधि ले लें तो हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{\text{चाप AB की लम्बाई}}{\text{परिधि}} = \frac{\angle AOB \text{ का डिग्री माप}}{360}$$

यदि $\angle AOB$ का डिग्री माप m है, तो इस सम्बन्ध से हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\text{चाप AB की लम्बाई} = \frac{m}{360} \times \text{परिधि} \qquad (2)$$

उदाहरणार्थ, यदि किसी चाप का डिग्री माप 15 है, तो इसकी

$$\text{लम्बाई} = \left(\frac{15}{360}\right) \text{परिधि}$$

$$= \left(\frac{1}{24}\right) \text{परिधि}$$

10.10 संख्या π

प्राचीन समय में प्रयोगों और पर्यवेक्षणों द्वारा यह पाया गया था कि एक **वृत्त की परिधि का उसके व्यास से अनुपात स्थिर* (constant) होता है, चाहे वृत्त का साइज कुछ भी हो ।**

क्या आप देख सकते हैं कि यह महत्वपूर्ण परिणाम इस तथ्य के फलस्वरूप प्राप्त हुआ है कि सभी वृत्त समरूप होते हैं और समरूप आकृतियों में सभी तदनुरूपी लम्बाइयाँ एक ही अनुपात में होनी चाहिए । परन्तु इसकी उपपत्ति प्रस्तुत पुस्तक की सीमा के बाहर है ।

परिधि का व्यास से स्थिर अनुपात π द्वारा व्यक्त किया जाता है, जो कि

*** कक्षा में क्रिया-कलाप हेतु सुझाव**

भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं के बहुत से वृत्त खींचिए । धागे और रूलर की सहायता से उनकी परिधियाँ ज्ञात कीजिए । फिर, परिधि का व्यास से अनुपात ज्ञात कीजिए । आप क्या देखते हैं ?

ग्रीक वर्णमाला का 16 वाँ अक्षर है। यदि r वृत्त की त्रिज्या है, तो हमें निम्न सूत्र प्राप्त होता है :

$$\text{परिधि} = \pi \times \text{व्यास} = \pi \times 2r = 2\pi r \qquad (3)$$

यदि हम चाप की लम्बाई के लिए अनुच्छेद 10.9 में दिए सूत्र (2) में परिधि का यह मान प्रतिस्थापित कर लें, तो हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\text{चाप की लम्बाई} = \frac{m}{360} \times 2\pi r = \frac{m\pi r}{180} \qquad (4)$$

यह जाँच करने के लिए कि वृत्त की परिधि का उसके व्यास से अनुपात स्थिर होता है, हम निम्नलिखित प्रयोग कर सकते हैं :

आइए भिन्न साइज़ों की कुछ वृत्तीय डिस्क (circular discs) लें और उनकी परिधियाँ और व्यास माप लें। ये डिस्क आपको कहाँ से प्राप्त होंगी ? आप भिन्न-भिन्न साइज़ों की बोतलों के प्लास्टिक के ढक्कन अथवा कैरम बोर्ड के स्ट्राइकर, इत्यादि ले सकते हैं। यदि हम परिधि को व्यास से भाग दें तो प्रत्येक अवस्था में हमें एक संख्या प्राप्त होगी जो तीन से कुछ बड़ी है। यदि हमारा माप ठीक है तो हमें 3.1 से कुछ बड़ी संख्या प्राप्त होनी चाहिए।

हम परिधियों के सही माप किस प्रकार ले सकते हैं ? हम एक मज़बूत पतली डोरी लेते हैं और इसे डिस्क के किनारे-किनारे पर कई बार उदाहरणार्थ पाँच या छः बार घुमा कर फिर इसे खोलकर माप लेते हैं और फिर जितनी बार इसे घुमाया था उतनी संख्या से इस लम्बाई को भाग दे देते हैं, जिससे हमें परिधि ज्ञात हो जाती है।

हम व्यास को कैसे मापते हैं ? क्या आपने खराद का काम करने वाले व्यक्ति को देखा है जो धातु की छड़ों के व्यास मापकर उन्हें भिन्न-भिन्न साइज़ों में परिवर्तित करता रहता है ? वह एक यंत्र **कैलिपर (calipers)** का प्रयोग करता है जो एक **डिवाइडर (divider)** की तरह होता है जिसकी धनुष के आकार की टाँगे होती हैं। जिस डिस्क को मापा जाना है उसके व्यास के उपयुक्त कैलिपर को खोला जा सकता है। जब डिस्क ठीक कैलिपर के बिन्दुओं A और B से गुज़र सकती है तो हम बिन्दुओं A, B को अंशांकित रूलर पर रखकर और उनके बीच की दूरी को पढ़कर व्यास का माप ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ

भी प्रत्येक डिस्क के व्यास को कई बार मापा जा सकता है और उनके माध्य को व्यास के उत्तम सन्निकट मान के रूप में लिया जा सकता है ।

हम ऊपर देख चुके हैं कि किसी वृत्त की परिधि का उसके व्यास से अनुपात 3.1 से कुछ अधिक होता है । उच्चतर कक्षाओं में आप सीखेंगे कि जितना विशुद्ध हम चाहें उतना विशुद्ध π का मान ज्ञात करने के लिए अनेक सूत्र हैं। अर्थात् जितने दशमलव स्थानों तक शुद्ध हम चाहें π का मान निकाला जा सकता है । हमें यह प्राप्त होता है कि छः दशमलव स्थानों तक

$$\pi = 3.141592$$

संख्या π का अति रुचिपूर्ण इतिहास है । आर्किमिडीज़ ने ज्ञात किया था कि π का मान $3\frac{10}{71}$ और $3\frac{1}{7}$ के बीच में है । प्राचीन भारतीय π के मान के लिए $\sqrt{10} = 3.16227...$ का प्रयोग करते थे जो कि इतना सही नहीं है जितना कि उपरोक्त मान । परन्तु छठी शताब्दी में, आर्यभट्ट ने अपनी 'गणित' पुस्तक "आर्यभट्टीयम" में π का निम्नलिखित अति सही सन्निकट मान दिया था :

$$\frac{62832}{20000} = 3.1416$$

भास्कर (1050 ई०) ने आर्यभट्ट द्वारा दिए गए π के मान को दोहराया था परन्तु उन्होंने यह भी ज्ञात कर लिया था कि गोलों (spheres) के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों को कैसे परिकलित किया जाता है ।

19वीं शताब्दी के अंत में डब्लयु० शैंकस ने 707 दशमलव स्थानों तक π का मान ज्ञात करने के लिए अपने जीवन के बीस वर्ष बिता दिए थे। परन्तु यह मान बाद में 528 वें स्थान पर गलत पाया गया था । इलैक्ट्रानिक कम्प्यूटरों के आगमन से, जो कि एक सैकन्ड में मूलभूत योग की लाखों प्रक्रियाएँ कर सकते हैं, π का मान कुछ ही सैकन्डों में कई बार 10000 से भी अधिक अंकों तक परिकलित किया जा चुका है। निस्संदेह, इन परिकलनाओं का कोई व्यवहारिक उपयोग नहीं है क्योंकि हम कभी भी कुछ दशमलव स्थानों से अधिक का प्रयोग नहीं करते ।

हम प्राय: सन्निकट मानों

$\frac{22}{7}$, अथवा $\frac{355}{113}$ (जो सर्वप्रथम चीनियों द्वारा दिया गया था)

$=3.141592...$, अथवा 3.14 अथवा 3.1416 का प्रयोग करते हैं।

कुछ बहुत अधिक अनुमानित (rough) परिकलनाओं में जिनमें π^2 संबद्ध हो, हम $\pi^2=10$ का प्रयोग कर सकते हैं।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : यदि एक वृत्त की त्रिज्या 5 सें० मी० है, तो उसकी परिधि ज्ञात कीजिए। ($\pi=3.1416$ लीजिए)

हल : परिधि $=2\pi r=2\times3.1416\times5=31.416$ सें० मी०

उदाहरण 2 : 3.5 सें० मी० की त्रिज्या के एक वृत्त में एक चाप का डिग्री माप 45 है। चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए। ($\pi=\frac{22}{7}$ लीजिए)

हल : चाप की लम्बाई $=\frac{m\pi r}{180}=\frac{45\times22\times3.5}{180\times7}=2.75$ सें० मी०

10.11 टिप्पणी

हमने ऊपर एक चाप के डिग्री माप को उसके केन्द्रीय कोण के डिग्री माप अर्थात् चाप के केन्द्रीय कोण में निहित डिग्रियों की संख्या के रूप में परिभाषित किया है। यदि हम कोण मापने की किसी अन्य विधि का प्रयोग करें तो चाप का कोणीय माप किसी भिन्न संख्या द्वारा निरूपित होगा। यद्यपि कोणों के व्यवहारिक माप के लिए प्राय: डिग्री माप अर्थात् माप की **साठ आधार प्रणाली (sexagesimal system)** का ही प्रयोग होता है परन्तु उच्चतर गणित के सिद्धांतिक कार्य में **वृत्तीय प्रणाली (circular system)** अधिक लाभदायक है। इस प्रणाली में माप का मात्रक **रेडियन (radian)** होता है जो कि उस चाप के केन्द्रीय कोण के समान होता है जिसकी लम्बाई वृत्त की त्रिज्या के समान है। तब हमें एक सरल सम्बन्ध प्राप्त होता है, वह यह कि

चाप की लम्बाई = त्रिज्या × चाप का वृत्तीय माप

हम यह भी देखते हैं कि 1 रेडियन = 57.296 डिग्री (लगभग)

प्रश्नावली 10.3

1. AOC और BOD एक वृत्त के परस्पर लम्ब व्यासों का एक युग्म है। निम्नलिखित चापों के डिग्री माप ज्ञात कीजिए :

(i) लघु चाप AB (ii) दीर्घ चाप AB (iii) ABC (iv) ADC

2. एक समबाहु त्रिभुज ABC के परिवृत्त (circumcircle) के लघु चाप BC और दीर्घ चाप BC के डिग्री माप ज्ञात कीजिए।

3. P और Q एक वृत्त पर स्थित बिंदु हैं। दीर्घ चाप PQ और लघु चाप PQ के डिग्री माप ज्ञात कीजिए यदि

(i) दीर्घ चाप = लघु चाप का चार गुना

(ii) दीर्घ चाप = लघु चाप का पाँच गुना

निम्नलिखित प्रश्नों में $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए :

4. एक ऐसे वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या निम्न है :

(i) 4 सें० मी० (ii) 7 सें० मी० (iii) 14 मी० (iv) 2 कि० मी०

5. एक ऐसे वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि निम्न है :

(i) 55 सें० मी० (ii) 100 सें० मी० (iii) 6.6 मी० (iv) 8.69 मी०

6. पृथ्वी की भूमध्य रेखा (equator) की त्रिज्या 6400 कि० मी० है। भूमध्य रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

7. 3.5 सें० मी० त्रिज्या के एक वृत्त की चापों की लम्बाइयाँ ज्ञात कीजिए यदि उनके डिग्री माप निम्नलिखित हैं :

(i) 15 (ii) 30 (iii) 60 (iv) 72 (v) 90 (vi) 112.5

मुख्य संकल्पनाएँ

एक वृत्त और एक रेखा
का प्रतिच्छेदन
छेदक
स्पर्श रेखा
स्पर्श बिंदु
वृत्त की स्पर्श रेखा स्पर्श
बिंदु से होकर जाने वाली
त्रिज्या पर लम्ब होती है
एक बिंदु से स्पर्श रेखाओं की संख्या
वृत्त पर स्थित किसी बिंदु पर वृत्त की
स्पर्श रेखा खींचना
वृत्त के बाहर स्थित किसी बिंदु से
वृत्त की स्पर्श रेखाएँ खींचना
वृत्त के बाहर स्थित किसी बिंदु
से खींची गईं वृत्त की दोनों
स्पर्श रेखाएँ समान होती हैं
दो वृत्तों का प्रतिच्छेदन
उभयनिष्ठ जीवा
उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा
एक चाप का डिग्री माप
केन्द्रीय कोण
संख्या π

एकक XI

क्षेत्रफल

इस एकक में, हम कुछ ऋजुरेखीय आकृतियों (rectilinear figures) के क्षेत्रफलों और वृत्त के क्षेत्रफल के विषय में सीखेंगे। हम क्षेत्रफल के मापन के लिए वर्गों की गणना की विधि भी सीखेंगे।

11.1 पुनरावलोकन

आप कुछ सरल ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधियों से पहले ही परिचित हैं। अपनी पिछली कक्षाओं से आपको निम्नलिखित का पुनरावलोकन करना चाहिए :

क्षेत्रफल : क्षेत्रफल का मात्रक

वर्ग का क्षेत्रफल $=$ (भुजा)^2

आयत का क्षेत्रफल $=$ लम्बाई $\times$ चौड़ाई

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ शीर्षलम्ब

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ दो भुजाओं का गुणनफल (कर्ण के अतिरिक्त)

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $=$ आधार $\times$ शीर्षलम्ब

समलंब (trapezium) का क्षेत्रफल $=$ समांतर भुजाओं का औसत $\times$ उनके बीच की दूरी

इसलिए कि आप उपरोक्त सूत्रों का पुनरावलोकन एवं प्रयोग कर सकें, हम यहाँ एक पुनरावलोकन प्रश्नावली देते हैं।

प्रश्नावली 11.1

1. एक वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा निम्न है :
   (i) 4.1 सें० मी० (ii) 6.6 सें० मी०
2. एक वर्ग की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल निम्न है :
   (i) 30.25 वर्ग सें० मी० (ii) 40.96 वर्ग मी०
3. एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः निम्न हैं :
   (i) 8.25 मी०, 2.75 मी० (ii) 22 मी०, 5.5 मी०
4. एक आयत की चौड़ाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल और लम्बाई क्रमशः निम्न हैं :
   (i) 450 वर्ग सें० मी०, 11.25 सें० मी० (ii) 420 वर्ग मी०, 15 मी०
5. एक किसान 200 मी० लम्बे और 100 मी० चौड़े एक आयताकार खेत में गेहूँ उगाता है। यदि गेहूँ की उपज 1.5 कि० ग्रा० प्रति वर्ग मी० हो तो मीट्रिक टनों में, कुल उपज ज्ञात कीजिए। (1 मीट्रिक टन=1000 कि० ग्रा०)
6. एक व्यक्ति 45 रु० प्रति वर्ग मी० की दर से 20000 रु० में एक प्लाट खरीदता है। यदि प्लाट की चौड़ाई 15 मी० है, तो उसका क्षेत्रफल और लम्बाई ज्ञात कीजिए।
7. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ (कर्ण के अतिरिक्त) निम्न हैं :
   (i) 3.9 सें० मी०, 6.3 सें० मी० (ii) 100.5 मी०, 92.7 मी०
8. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके आधार और तदनुरूपी शीर्षलम्ब निम्न हैं :
   (i) 12.5 सें० मी०, 8.2 सें० मी० (ii) 20.37 सें० मी०, 16.91 सें० मी०
   (iii) 12.9 मी०, 7.6 मी० (iv) 321 मि० मी०, 196 मि० मी०

9. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके आधार और शीर्षलम्ब निम्न हैं :

(i) 5.4 सें० मी०, 5 सें० मी० (ii) 8 सें० मी०, 4 सें० मी०

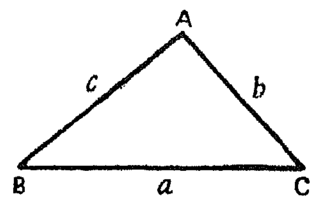
10. एक समलम्ब की दो समांतर भुजाओं की लम्बाइयाँ 8 सें० मी० और 6 सें० मी० हैं और उनके बीच की दूरी 7 सें० मी० है। समलम्ब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11. एक समलम्ब का क्षेत्रफल 35 वर्ग सें० मी० है और उसकी समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 10 सें० मी० है। यदि एक समांतर भुजा की लम्बाई 5 सें० मी० है, तो दूसरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

*12. 4 मी० लम्बे और 3 मी० चौड़े एक कमरे के फर्श पर सफेद सीमेंट किया जाता है जिसमें 30 सें० मी० चौड़ा काला बार्डर (border) है। यदि सफेद सीमेंट की लागत 25 रु० प्रति वर्ग मी० और काले सीमेंट की लागत 20 रु० प्रति वर्ग मी० है, तो कुल लागत ज्ञात कीजिए।

11.2 त्रिभुज का क्षेत्रफल—हीरो का सूत्र

हम पढ़ चुके हैं कि एक त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार और तदनुरूपी शीर्षलम्ब के गुणनफल के आधे के समान होता है। अब हम त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने का एक अन्य सूत्र सीखेंगे जो पहली शताब्दी में यूनान के गणितज्ञ हीरो द्वारा दिया गया था। उन्होंने इस सूत्र का आविष्कार एक ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए किया जिसकी भुजाओं की लम्बाइयाँ ज्ञात हैं। सूत्र इस प्रकार है :



आकृति 11.1

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

जहाँ a, b और c भुजाओं की लम्बाइयाँ हैं (देखिए आकृति 11.1) और $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ त्रिभुज का अर्ध-परिमाप है। यह सूत्र प्राचीन भारतीयों को भी ज्ञात था।

हम हीरो के सूत्र को बिना उपपत्ति के ही मान लेंगे। इस सूत्र का लाभ यह है कि हमें केवल त्रिभुज की भुजाएँ ही मापनी पड़ती हैं और शीर्षलम्ब को मापने के लिए शीर्ष से सामने की भुजा पर लम्ब नहीं खींचना पड़ता। परन्तु हीरो के सूत्र की परिकलनाएँ इतनी सरल नहीं हैं।

हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण : यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमश: 3 सें० मी०, 4 सें० मी० और 5 सें० मी० हैं, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(3+4+5) = 6$ सें० मी०

अत:, क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$

$= 6$

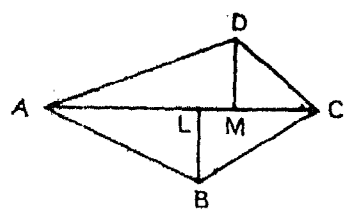
इस प्रकार, त्रिभुज का क्षेत्रफल 6 वर्ग सें० मी० है।

[पाठक को चाहिए कि वह इस त्रिभुज की रचना करे और देखे कि यह एक समकोण त्रिभुज है। अब पहले सूत्र से इसका क्षेत्रफल परिकलित कीजिए और जाँच कीजिए कि यह पुन: 6 वर्ग सें० मी० है।]

11.3 चतुर्भुज का क्षेत्रफल

हम कुछ विशेष प्रकार के चतुर्भुजों जैसे कि वर्ग, आयत, इत्यादि के क्षेत्रफलों के नियम सीख चुके हैं। अब हम किसी व्यापक चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखेंगे।

हम जानते हैं कि एक विकर्ण किसी चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में विभाजित करता है। उदाहरणार्थ, आकृति 11.2 में चतुर्भुज ABCD विकर्ण AC द्वारा दो त्रिभुजों ABC और ACD में विभाजित हो जाता है। तब चतुर्भुज का क्षेत्रफल दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के योग के समान है।



आकृति 11.2

त्रिभुजों ABC और ACD के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने में समर्थ

होने के लिए हम AC (अथवा बढ़ाई गई AC पर) लम्ब BL और DM खींचते हैं और AC, BL तथा DM को मापते हैं। तब,

चतुर्भुज का क्षेत्रफल = त्रिभुजों ABC और ACD के क्षेत्रफलों का योग

$$= \frac{1}{2}AC \times BL + \frac{1}{2}AC \times DM$$

$$= \frac{1}{2}AC(BL + DM)$$

दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम हीरो के सूत्र का प्रयोग भी कर सकते हैं। उस स्थिति में, हमें चतुर्भुज की भुजाओं और विकर्ण AC को मापना होगा।

हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण : चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल परिकलित कीजिए जिसके माप (सें० मी० में) आकृति 11.3 में दिए गए हैं।

हल : क्योंकि त्रिभुजों ABC और ACD की भुजाएँ दी गई हैं, अतः हम हीरो के सूत्र का प्रयोग करते हैं।

त्रिभुज ABC का अर्ध-परिमाप 19 सें० मी० है। अतः इसका क्षेत्रफल

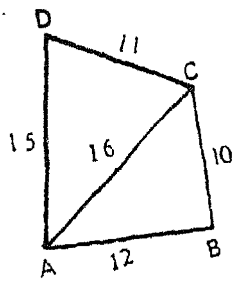
$= \sqrt{19\ (19-12)\ (19-10)(19-16)}$

$= \sqrt{(3591)} = 59.92$ वर्ग सें०मी० (लगभग)

त्रिभुज ACD का अर्ध-परिमाप 21 सें० मी० है। अतः इसका क्षेत्रफल

$= \sqrt{21\ (21-11)\ (21-15)\ (21-16)}$

$= \sqrt{(6300)} = 79.37$ वर्ग सें० मी० (लगभग)



आकृति 11.3

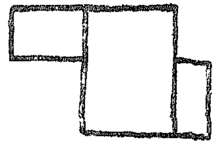
अतः, चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$= 59.92 + 79.37 = 139.29$ वर्ग सें० मी० (लगभग)

11.4 अनियमित ऋजुरेखीय आकृतियों के क्षेत्रफल

हमारे प्लाट अथवा खेत सदैव वर्गाकार अथवा आयताकार नहीं होते। वे प्रायः ऋजुरेखीय आकृतियाँ होती हैं, अर्थात् वे सरल रेखाओं द्वारा घिरी हुई

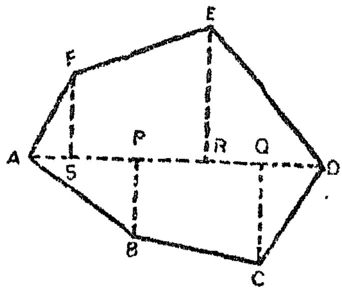
आकृतियाँ अथवा बहुभुज होती हैं। यदि इन्हें कुछ आयतों में विभाजित किया जा सकता है जैसा कि आकृति 11.4 में दिखाया गया है, तो वाँछित क्षेत्रफल केवल इन आयतों के क्षेत्रफलों के योग के समान होता है। यदि आकृति एक व्यापक आकार की है जिसे आयतों में विभाजित नहीं किया जा सकता, तो निम्नलिखित में से एक विधि का प्रयोग किया जा सकता है।



आकृति 11.4

(1) फील्ड विधि

आइए एक अनियमित ऋजु-रेखीय आकृति ABCDEF लें। (देखिए आकृति 11.5) आइए दो शीर्षों A और D, जो एक दूसरे से अधिकतम दूरी पर हैं, को मिलाएँ और AD पर लम्ब BP, CQ, ER, और FS खींचें। हम देखते हैं कि आकृति चार समकोण त्रिभुजों ASF, BPA, CQD और DRE तथा दो समलम्बों BCQP और EFSR में विभाजित हो गई है। यदि हमें लम्ब दूरियाँ BP, CQ, ER, FS तथा A से P, Q, R, S की दूरियाँ ज्ञात हों तो हम सुगमतापूर्वक इन त्रिभुजों और समलम्बों के क्षेत्रफलों को परिकलित कर सकते हैं। स्पष्ट रूप से, इन क्षेत्रफलों का योग दी हुई आकृति ABCDEF का क्षेत्रफल है।



आकृति 11.5

हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण : आकृति 11.5 में, यदि BP = 130 मी०, CQ = 120 मी०, ER = 120 मी०, FS = 100 मी० तथा AS = 150 मी०, AP = 200 मी०, AR = 350 मी०, AQ = 400 मी०, AD = 550 मी० है, तो ABCDEF का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : आकृति ABCDEF का क्षेत्रफल

= समकोण त्रिभुज ABP का क्षेत्रफल + समकोण त्रिभुज CQD का क्षेत्रफल + समकोण त्रिभुज DRE का क्षेत्रफल + समकोण त्रिभुज ASF का क्षेत्रफल + समलम्ब BCQP का क्षेत्रफल + समलम्ब EFSR का क्षेत्रफल

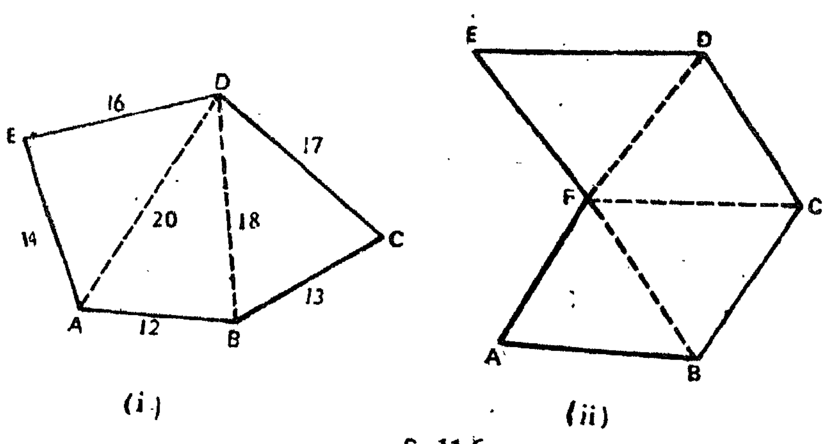
$$= \frac{1}{2} \times 200 \times 130 + \frac{1}{2} \times 150 \times 120 + \frac{1}{2} \times 200 \times 120$$
$$+ \frac{1}{2} \times 150 \times 100 + \frac{1}{2}(130+120) \times 200$$
$$+ \frac{1}{2}(100+120) \times 200$$
$$= \frac{1}{2}(26000+18000+24000+15000+50000+44000)$$
$$= \frac{1}{2} \times 177000 = 88500$$

अत :, ABCDEF का क्षेत्रफल 88500 वर्ग मी० है ।

टिप्पणी : उपरोक्त विधि का प्रयोग क्षेत्र मापन में किया जाता है । क्षेत्र सर्वेक्षण करने वाला व्यक्ति एक विशेष विधि से सभी मापों अर्थात् BP, CQ, इत्यादि का रिकार्ड अपनी फील्ड बुक में रखता है । हम इसके विषय में उच्चतर कक्षाओं में अध्ययन करेंगे । क्या आप देख सकते हैं कि इस विधि को फील्ड विधि(**Field Method**) क्यों कहा जाता है ?

(2) त्रिभुजन विधि

इस विधि में, आकृति को शीर्षों के युग्मों को मिलाने वाले और बहुभुज के अंत: भाग में स्थित रेखाखंडों द्वारा त्रिभुजों में विभाजित किया जाता है। (देखिए आकृति 11.6)



आकृति 11.6

आकृति का त्रिभुजों में विभाजन प्राय: कई विधियों से किया जा सकता है। हम आकृति 11.6 (i) में दी गई आकृति में इसकी जाँच कर सकते हैं। क्या आप देख सकते हैं कि दो रेखाखंड DA और DB खींचने से पंचभुज ABCDE तीन त्रिभुजों में विभाजित हो जाता है? इसी प्रकार आकृति 11.6 (ii) में, तीन रेखाखंड FB, FC और FD खींचने से ABCDEF चार त्रिभुजों में विभाजित हो जाता है। प्रत्येक स्थिति में, यदि हम एक भिन्न विधि से आकृति को त्रिभुजों में विभाजित करने का प्रयत्न करें तो हमें उतने ही त्रिभुज प्राप्त होते हैं और हमें उतने ही रेखाखंडों की आवश्यकता पड़ती है। क्या आप एक ऋजुरेखीय आकृति के लिए, जिसकी भुजाएँ दी गई हैं, त्रिभुजों की संख्या और इनके लिए आवश्यक रेखाखंडों के एक नियम के विषय में सोच सकते हैं?

एक दी हुई आकृति का क्षेत्रफल परिकलित करने के लिए हम सभी त्रिभुजों की भुजाओं की लम्बाइयाँ अर्थात् आकृति की भुजाओं और सभी रेखाखंडों की लम्बाइयाँ मापते हैं। फिर हम हीरो के सूत्र से प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल परिकलित करते हैं। इन क्षेत्रफलों के योग से हमें उस आकृति का क्षेत्रफल प्राप्त हो जाता है।

हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण : आकृति 11.6 (i) में, विभिन्न रेखाखंडों की लम्बाइयाँ मीटरों में दी गई हैं। पंचभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिभुजों ABD, BCD और ADE के अर्ध-परिमाप क्रमश: 25 मी०, 24 मी० और 25 मी० हैं। अत: उनके क्षेत्रफल निम्न हैं :

क्षेत्रफल $\triangle ABD = \sqrt{(25\times13\times7\times5)}$

$= \sqrt{11375} = 106.65$ वर्ग मी०

क्षेत्रफल $\triangle BCD = \sqrt{(24\times11\times7\times6)}$

$= \sqrt{11088} = 105.3$ वर्ग मी०

क्षेत्रफल $\triangle ADE = \sqrt{(25\times9\times5\times11)}$

$= \sqrt{12375} = 111.24$ वर्ग मी०

अत:, ABCDE का क्षेत्रफल

$= 106.65 + 105.30 + 111.24 = 323.19$ वर्ग मीटर

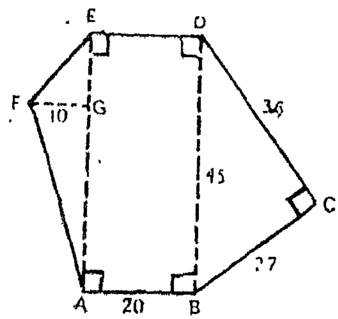
मानचित्र बनाने अथवा किन्हीं अन्य उद्देश्यों से किए जाने वाले भूमि के सर्वेक्षण में सरलतम और प्राय: प्रयोग में लाई जाने वाली विधि **'त्रिभुजन विधि'**

(**triangulation method**) का प्रयोग तब तक किया जाता था जब तक कि अधिक शक्तिशाली आधुनिक प्रविधियों का आविष्कार नहीं हुआ। भूमि के जिस भाग का सर्वेक्षण किया जाना हो उसकी सतह को उपयुक्त आकारों व साइजों के अनेक त्रिभुजों में बाँट दिया जाता है। इन्हें मापकर विभिन्न स्थानों की स्थिति, भूभागों के क्षेत्रफल तथा अन्य आवश्यक जानकारी प्राप्त की जाती थी।

प्रश्नावली 11.2

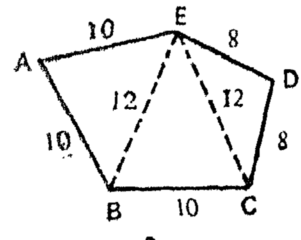
1. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ निम्न हैं :
   (i) 5 सें० मी०, 6 सें० मी०, 7 सें० मी०
   (ii) 7 सें० मी०, 9 सें० मी०, 14 सें० मी०
   (iii) 6.1 मी०, 5.3 मी०, 4.8 मी०
   (iv) 225 मि० मी०, 160 मि० मी०, 125 मि० मी०

2. एक खेत ABCDEF का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके माप मीटरों में आकृति 11.7 में दिए गए हैं, जहाँ ABDE एक आयत है, BCD एक समकोण त्रिभुज है और FG ⊥ AE है।



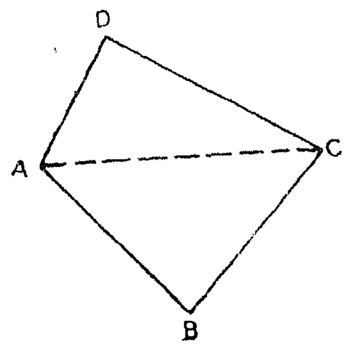
आकृति 11.7

3. बहुभुज ABCDE का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके माप मीटरों में आकृति 11.8 में दिए गए हैं।



आकृति 11.8

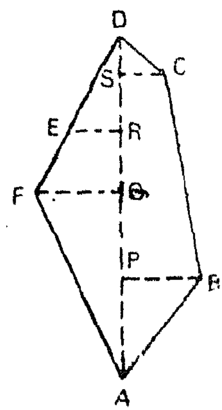
4. आकृति 11.9 में, यदि AB=BC =6 सें० मी०, CD=7 सें० मी०, DA=4 सें० मी० और विकर्ण AC= 8 सें० मी० है, तो चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.9

5. एक चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि उसका विकर्ण BD, 7 सें० मी० है और शीर्षों A तथा C से इस पर डाले गए लम्ब क्रमशः 3 सें० मी० और 4 सें० मी० हैं।

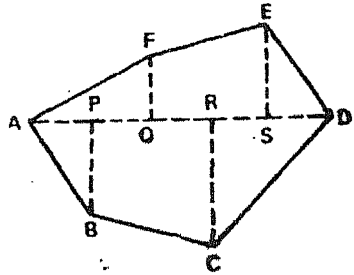
6. आकृति 11.10 में दिखाए गए क्षेत्र ABCDEF का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें BP, CS, ER और FQ क्रमशः B, C, E और F से AD पर डाले गए लम्ब हैं तथा AP=70 मी०, AQ= 130 मी०, AR=170 मी०, AS= 210 मी०, AD=240 मी०, BP= 50 मी०, CS=30 मी०, ER= 40 मी० और FQ=60 मी० है।



आकृति 11.10

7. एक समबाहु त्रिभुज, जिसकी एक भुजा 7 सें० मी० लम्बी है, का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. आकृति 11.11 में दिखाए गए क्षेत्र ABCDEF का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें BP, CR, ES और FO क्रमश: B, C, E और F से AD पर डाले गए लम्ब हैं तथा AP=10 मी०, AO=20 मी०, AR=30 मी, AS=40 मी०, AD=50 मी०, BP=15 मी०, CR=20 मी०, ES=15 मी० और FO=10 मी० है।

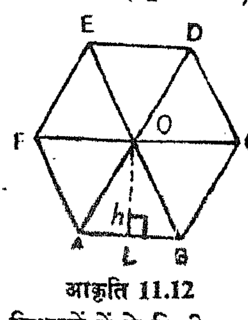


आकृति 11.11

अब हम एक वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र को सीखेंगे। ऐसा करने के लिए आइए पहले एक सम बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

*11.5 सम बहुभुज का क्षेत्रफल

आपको याद होगा कि एक बहुभुज जिसकी सभी भुजाएँ समान हों और सभी कोण समान हों, **सम बहुभुज (regular polygon)** कहलाता है। आपको यह भी याद होगा कि सम बहुभुज के अंतर्गत एक बिंदु ऐसा होता है जो उसके सभी शीर्षों से समदूरस्थ है। यह बिंदु सम बहुभुज का **केन्द्र** कहलाता है। यदि केन्द्र से हम भुजाओं पर लम्ब गिराएँ, तो हम देखते हैं कि इन सभी लम्बों की लम्बाइयाँ समान हैं। यह लम्बाई सम बहुभुज की **अंत: त्रिज्या (apothem)** कहलाती है। आकृति 11.12 में, ABCDEF छ: भुजाओं का एक सम बहुभुज है और इसका केन्द्र O है। आइए O को शीर्षों A, B, C, D, E और F से मिलाएँ। हम देखते हैं कि बहुभुज छ: सर्वांगसम त्रिभुजों OAB, OBC, OCD, ODE, OEF और OFA में विभाजित हो जाता है। (क्यों ?) बहुभुज का क्षेत्रफल इन छ: त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है। परन्तु हम जानते हैं कि ये छ: त्रिभुज सर्वांगसम हैं। अत: बहुभुज का क्षेत्रफल इन छ: त्रिभुजों में से किसी एक



आकृति 11.12

के क्षेत्रफल से छः गुना होगा । आइए अब OL ⊥ AB खींचें ।

अब, बहुभुज की अंतः त्रिज्या = OL = h (मान लीजिए) और बहुभुज का परिमाप = 6 AB = p (मान लीजिए)

तब, बहुभुज का क्षेत्रफल = △ OAB के क्षेत्रफल का छः गुना

$$= 6 \times \frac{1}{2} \times h \times AB = \frac{1}{2} h \times 6AB$$

$$= \frac{1}{2} hp$$

उपरोक्त विधि को स्पष्ट रूप से कितनी ही भुजाओं वाले सम बहुभुज के लिए दोहराया जा सकता है और हमें क्षेत्रफल के लिए वही व्यंजक प्राप्त होगा । इस प्रकार,

सम बहुभुज का क्षेत्रफल = ½ अंतः त्रिज्या × परिमाप

11.6 वृत्त का क्षेत्रफल

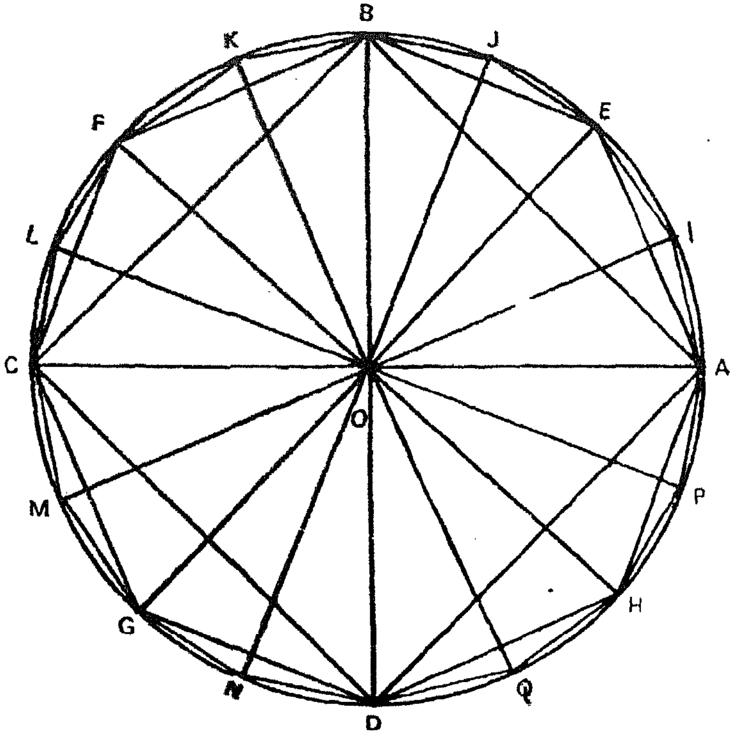
मान लीजिए एक वृत्त का केन्द्र O और त्रिज्या r है । आइए दो व्यास AOC और BOD ऐसे खींचें जो परस्पर लम्ब हों । (देखिए आकृति 11.13) आइए A को B से, B को C से, C को D से और D को A से मिलाएँ । हमें वृत्त के अंतर्गत** (inscribed) एक वर्ग ABCD प्राप्त होता है । (क्यों ?)

अब आइए कोणों AOB, BOC, COD और DOA को समद्विभाजित करें और मान लें कि ये समद्विभाजक वृत्त को क्रमशः बिंदुओं E, F, G और H पर मिलते हैं । आइए A को E से, E को B से,..., और H को A से मिलाएँ । हमें एक अष्टभुज (octagon) AEBFCGDH प्राप्त होता है । क्या यह सम है ? (क्यों ?)

पुनः, आइए आठ कोणों AOE, EOB,..., और HOA को समद्विभाजित करें और मान लें कि ये समद्विभाजक वृत्त को क्रमशः बिंदुओं I,J,K,L,M,N,Q और P पर मिलते हैं । आइए A को I से, I को E से,..., और अंत में P को A से मिलाएँ । हमें 16 भुजाओं वाला एक बहुभुज प्राप्त होता है । क्या यह सम है ? (क्यों ?)

आइए इस 16 भुजाओं वाले बहुभुज पर एक अन्य दृष्टिकोण से विचार करें । इसकी भुजाएँ वृत्त के कितना निकट हैं ? बहुत ही निकट । फिर, मान

** यदि किसी बहुभुज के सभी शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हों, तो वह बहुभुज उस वृत्त के अंतर्गत कहा जाता है ।



आकृति 11.13

लीजिए कि हम O पर बने सभी 16 कोणों को समद्विभाजित करते हैं और समद्विभाजकों को वृत्त पर मिलने देते हैं। यदि हम वृत्त के 32 बिंदुओं (16 पहले वाले बिंदु और 16 नए प्राप्त हुए हैं) में से प्रत्येक क्रमागत दो बिंदुओं को मिलाएँ, तो हमें वृत्त के अंतर्गत 32 भुजाओं वाला एक बहुभुज प्राप्त होता है। क्या यह भी सम होगा ? हाँ। यह बहुभुज हमारी आकृति में नहीं दिखाया गया है क्योंकि इस बहुभुज की 32 भुजाओं को इस प्रकार दिखाना सम्भव नहीं है कि वृत्त पर इनके तदनुरूपी चाप और ये भुजाएँ स्पष्ट रूप से अलग-अलग दिखाई दें। यह बहुभुज पहले वाले बहुभुजों से भी अधिक वृत्त के निकट है।

हम इस प्रक्रिया के बार-बार दोहराए जाने की कल्पना कर सकते हैं। इस प्रकार हमें 4, 8, 16, 32, 64, 128,... भुजाओं वाले सम बहुभुज प्राप्त होते हैं जो कि सभी वृत्त के अंतर्गत हैं और प्रत्येक अपने से पहले वाले बहुभुज की अपेक्षा वृत्त के अधिक निकट है। इन बहुभुजों के क्षेत्रफलों के विषय में आप क्या सोचते हैं ? और इनके परिमापों के विषय में आप क्या सोचते हैं ? क्या हम देख सकते हैं कि उपरोक्त प्रक्रिया के प्रत्येक चरण के साथ इनके क्षेत्रफल और परिमाप दोनों ही वृत्त के क्षेत्रफल और परिमाप के निकट और निकटतर होते जाते हैं ?

इन बहुभुजों की अंतः त्रिज्याओं के विषय में आप क्या सोचते हैं ? जैसे-जैसे भुजाओं की संख्या बढ़ती जाती है वैसे-वैसे त्रिभुज जिनमें बहुभुज विभाजित किया जाता है, पतले तथा और अधिक पतले होते जाते हैं। क्या हम कह सकते हैं कि प्रत्येक चरण के साथ अंतः त्रिज्या वृत्त की त्रिज्या के निकटतर होती जाती है ?

इस प्रकार क्या हम देख सकते हैं कि **वृत्त का क्षेत्रफल सम बहुभुज के क्षेत्रफल में अंतः त्रिज्या को वृत्त की त्रिज्या से और बहुभुज के परिमाप को वृत्त की परिधि से प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जा सकता है ?** हाँ! हम सीख चुके हैं कि एक सम बहुभुज का क्षेत्रफल (अंतः त्रिज्या × परिमाप) का आधा होता है और वृत्त की परिधि $2\pi r$ होती है। अतः,

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times r \times 2\pi r = \pi r^2$$

हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : एक वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका व्यास 2.8 सें० मी० है। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

हल: वृत्त की त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times 2.8 = 1.4$ सें० मी०

अब, वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 1.4$$

$$= 6.16$$

अतः, वृत्त का क्षेत्रफल 6.16 वर्ग सें० मी० है।

उदाहरण 2 : 20 मीटर त्रिज्या के एक वृत्ताकार पार्क के चारों ओर 5

मीटर चौड़ी एक सड़क है। 12.60 रु० प्रति वर्ग मीटर की दर से सड़क पर तारकोल बिछाने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

हल : सड़क की बाह्य सीमा की त्रिज्या 25 मीटर है और आंतरिक सीमा की त्रिज्या 20 मीटर है। (क्यों ?)

सड़क का क्षेत्रफल = 25 मीटर त्रिज्या के वृत्त का क्षेत्रफल

— 20 मीटर त्रिज्या के वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi(25 \times 25) - \pi(20 \times 20)$

$= \pi(25^2 - 20^2)$

$= \pi(25+20)(25-20)$

$= \pi(45) \times (5)$

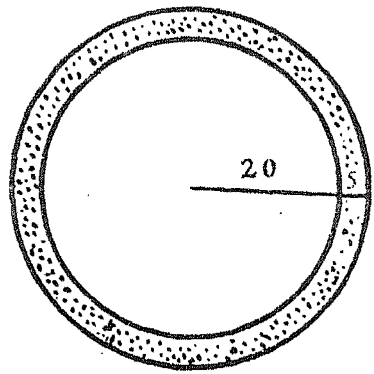
$= 225\pi$ वर्ग मीटर

$= 225 \times \frac{22}{7}$ वर्ग मीटर

अत : सड़क पर तारकोल बिछाने का व्यय

$= 225 \times \frac{22}{7} \times 12.60$ रु०

$= 8910$ रु०



आकृति 11.14

प्रश्नावली 11.3

1. एक वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या निम्न है :

   (i) 3.5 सें० मी० (ii) 4.2 सें० मी० (iii) 7.7 सें० मी०

   ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

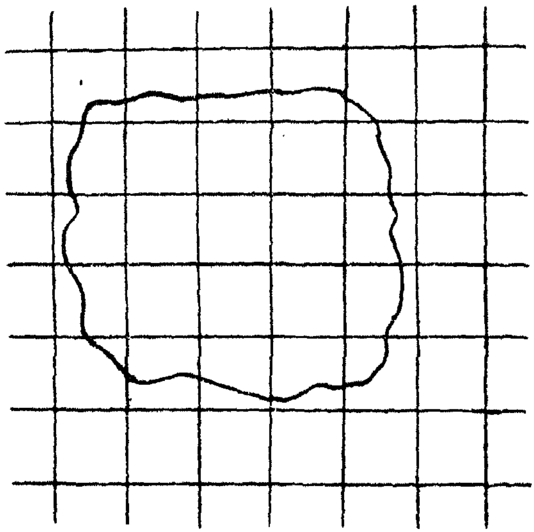
2. दो वृत्तों के व्यास क्रमशः 8 सें० मी० और 12 सें० मी० हैं। बड़े वृत्त के क्षेत्रफल का, छोटे वृत्त के क्षेत्रफल से अनुपात ज्ञात कीजिए।

3. एक वृत्त और एक वर्ग दोनों का परिमाप 88 सें० मी० है। इनमें से किसका क्षेत्रफल अधिक है ? सकारण उत्तर दीजिए।

4. दो वृत्तों की परिधियाँ क्रमशः 44 सें॰ मी॰ और 110 सें॰ मी॰ हैं। उनकी त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए और फिर उनके क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11.7 वर्गों की गणना की विधि से क्षेत्रफल मापना

व्यवहारिक स्थिति में किसी प्रयोग तथा पर्यवेक्षण के परिणामस्वरूप प्रायः ऐसा होता है कि हमें ऐसी बंद वक्र (closed curve) प्राप्त हो जाती है जैसी कि आकृति 11.15 में दिखाई गई है। किसी यान्त्रिकीय विधि से भी



आकृति 11.15

ऐसी वक्र को खींचा जा सकता है। ऐसी वक्र कभी कभी भौतिक रुचि की किसी मात्रा को निरूपित करती है तथा हम इसका क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते हैं। क्योंकि ऐसी वक्र का आकार अत्यधिक अनियमित होता है, अतः हम ऐसे किसी भी सूत्र का प्रयोग नहीं कर सकते जो अब तक हम सीख चुके हैं। परन्तु हम नीचे स्पष्ट की गई **वर्गों की गणना की विधि** (**method of counting squares**) से क्षेत्रफल की एक सन्निकट माप ज्ञात कर सकते हैं :

हम बंद वक्र को ग्राफ पेपर पर अक्स (trace) करते हैं अथवा पारदर्शक ग्राफ पेपर को वक्र पर रखते हैं। हम जानते हैं कि ग्राफ पेपर प्रायः

॰ मी॰, अर्ध-सें॰ मी॰ तथा मि॰ मी॰ वर्गों में विभाजित होता है। हम ऐसे ं॰मी॰ वर्गों की गणना करते हैं जो या तो पूर्ण रूप से वक्र के अंत: भाग में स्थित अथवा जिनका अधिकांश भाग वक्र के अंत: भाग में स्थित है और अन्य वर्गों ो छोड़ देते हैं। इन वर्गों की संख्या से हमें वर्ग सें॰ मी॰ में वक्र का न्निकट क्षेत्रफल प्राप्त हो जाता है। आकृति 11.15 में दिखाई गई वक्र के ाए यह संख्या 18 है। अत: इसका क्षेत्रफल 18 वर्ग सें॰ मी॰ (लगभग) है।

पाठक ध्यान दें कि यदि हम सें॰ मी॰ वर्गों के स्थान पर मि॰ मी॰ वर्गों ी गणना करें, तो हमें प्राय: क्षेत्रफल का अधिक विशुद्ध मान प्राप्त होगा।

प्रश्नावली 11.4

1. 3.5 सें॰ मी॰ की त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए और वर्गों की गणना की विधि से इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। इस क्षेत्रफल की तुलना सूत्र द्वारा ज्ञात किए गए क्षेत्रफल से कीजिए।
2. एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ क्रमश: 4 सें॰ मी॰, 5 सें॰ मी॰ और 3 सें॰ मी॰ हैं और वर्गों की गणना की विधि से इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। इसकी तुलना सूत्र द्वारा ज्ञात किए गए क्षेत्रफल से कीजिए।
3. अपनी कापी में कुछ अनियमित आकृतियाँ खींचिए और उनके क्षेत्रफल वर्गों की गणना की विधि से ज्ञात कीजिए।

मुख्य संकल्पनाएँ

हीरो का सूत्र	सम बहुभुज का क्षेत्रफल
चतुर्भुज का क्षेत्रफल	
अनियमित ऋजुरेखीय आकृति का क्षेत्रफल	वृत्त का क्षेत्रफल
फील्ड विधि	वर्गों की गणना की विधि
त्रिभुजन की विधि	

आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल

इस एकक में, हम 'आयतन' और 'पृष्ठीय क्षेत्रफल' के विषय में अध्ययन करेंगे। हम घनाभों, घनों, लंब वृत्तीय बेलनों, लंब वृत्तीय शंकुओं और गोलों के आयतन तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करना भी सीखेंगे।

12.1 भूमिका

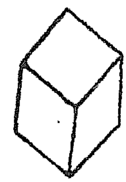
हम क्षेत्रफल की संकलपना के विषय में पढ़ चुके हैं और यह भी सीख चुके हैं कि कुछ सरल आकृतियां जैसे कि आयतों, त्रिभुजों, वृत्तों, इत्यादि के क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। हम कुछ सरल ठोसों जैसे कि घनों, घनाभों इत्यादि और उनके फलकों, किनारों तथा शीर्षों के विषय में भी पढ़ चुके हैं। हम देखते हैं प्रत्येक ठोस कुछ स्थान घेरता है। **किसी ठोस द्वारा घेरे गए स्थान की मात्रा उसका आयतन (volume) कहलाती है। साथ ही, किसी ठोस के पृष्ठों का क्षेत्रफल उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल (surface area) कहलाता है।** अब हम कुछ सरल ठोसों के आयतनों और उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों के विषय में अध्ययन करेंगे।

किसी ठोस का साइज़ जितना बड़ा होगा उसका आयतन उतना ही अधिक होगा। परन्तु जैसा कि रेखाखंडों की लम्बाइयों तथा आकृतियों के क्षेत्रफलों के लिए था, हम केवल देखने मात्र से यह नहीं कह सकते कि दो ठोसों में से किसका आयतन अधिक है और कितना अधिक है। अतः हमें आयतन के मापन के एक मात्रक की आवश्यकता है।

12.2 आयतन का मात्रक

हम एक ऐसे घन के आयतन को जिसकी भुजा एक मात्रक लम्बाई (unit

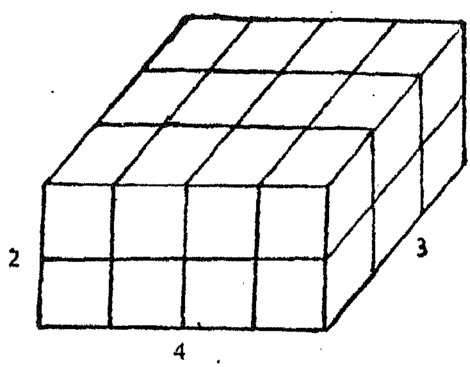
length) की है, आयतनों के मापन के मात्रक के रूप में लेते हैं। उदाहरणार्थ यदि 1 सें॰ मी॰ भुजा के घन को मात्रक लेते हैं तो आयतन का मात्रक 1घन सें॰ मी॰ होगा। (देखिए आकृति 12.1) इसे संक्षेप में ‘घन सें॰ मी॰’ अथवा ‘सें॰ मी ’ लिखते हैं। दूसरी ओर, यदि 1 मीटर की भुजा के घन को मात्रक लेते हैं तो आयतन का मात्रक 1 घन मीटर होगा। इसे संक्षेप में ‘घन मी॰’ अथवा ‘मी ’ लिखते हैं। इसी प्रकार, हमें लम्बाई के दूसरे मात्रकों के तदनुरूप आयतन के अन्य मात्रक प्राप्त होते हैं। यदि हम अपेक्षाकृत छोटे आयतनों को माप रहे हैं तो हम 1 घन मि॰ मी॰ को आयतन के मात्रक के रूप में लेते हैं। अपेक्षाकृत बड़े आयतनों के लिए हम 1 घन कि॰ मी॰ को मात्रक के रूप में लेते हैं।



आकृति 12.1

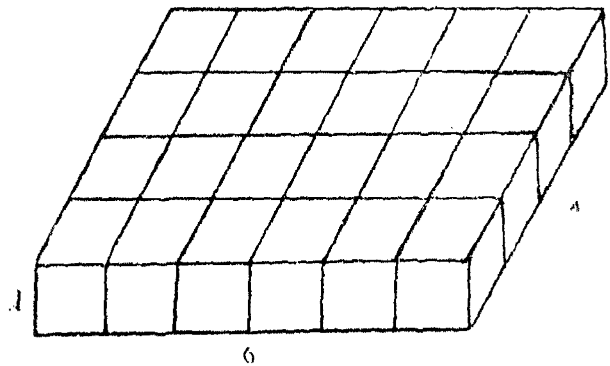
12.3 घनाभ का आयतन

जब आप छोटे थे तो शायद आपने लकड़ी अथवा प्लास्टिक के बने घनाकार ब्लाकों से खेला होगा। आइए 1 सें॰ मी॰ की भुजा के 24 समान घन (cubes) लें और उन्हें इस प्रकार मिला कर रखें कि एक घनाभ बन जाए। इन

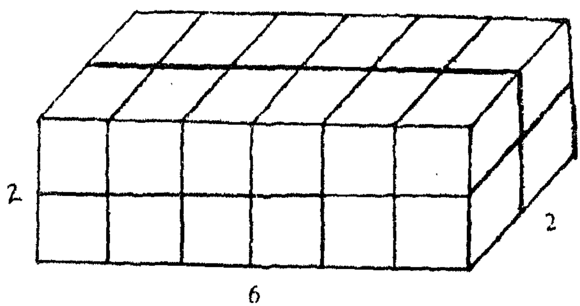


(i)

आकृति 12.2



(ii)



(iii)

आकृति 12.2

घनों से हम कितने भिन्न घनाभ बना सकते हैं ? बहुत से। ऐसे तीन घनाभ आकृति 12.2 (i), (ii) और (iii) में दिखाए गए हैं।

इनमें से प्रत्येक घनाभ के आयतन के विषय में हम क्या कह सकते हैं ? क्योंकि इनमें से प्रत्येक घनाभ 24 मात्रक घनों (unit cubes) को मिलाकर बनाया गया है, अतः प्रत्येक का आयतन आयतन के 24 मात्रकों (घन मात्रकों) के समान अर्थात् 24 घन सें० मी० है।

उपरोक्त आकृतियों में प्रत्येक घनाभ की लम्बाई (l), चौड़ाई (b) और ऊँचाई (h) तथा इनके गुणनफल $l \times b \times h$ के विषय में आप क्या सोचते हैं ?

आकृति (i) में, $l=4$, $b=3$, $h=2$ तथा $l \times b \times h=24$ है।

आकृति (ii) में, $l=6$, $b=4$, $h=1$ तथा $l \times b \times h=24$ है।

आकृति (iii) में, $l=6$, $b=2$, $h=2$ तथा $l \times b \times h=24$ है।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि उपरोक्त तीनों आकृतियों में प्रत्येक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई, और ऊँचाई का गुणनफल 24 है जो कि घनाभ में आयतन के मात्रकों (घन मात्रकों) की संख्या के बराबर है।

24 मात्रक घनों से हम और कितने भिन्न घनाभ बना सकते हैं ? तीन ऐसे घनाभ और हैं जिनकी विमाएँ (dimensions) क्रमश: $8 \times 3 \times 1$, $12 \times 2 \times 1$ और $24 \times 1 \times 1$ हैं। इनके अतिरिक्त अन्य सभी घनाभ अब तक बनाए जा चुके छ: घनाभों से लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई को बदल फेर कर बनाए जा सकते हैं। एक ऐसा घनाभ बनाना जिसकी लम्बाई 1, चौड़ाई 1 और ऊँचाई 24 है, अति रुचिकर होगा। इसमें कुछ संतुलन की आवश्यकता है। इन सभी स्थितियों में हम देखते हैं कि तीनों विमाओं का गुणनफल 24 है जोकि घनाभ का आयतन है।

हम मात्रक घनों को किसी और संख्या उदाहरणार्थ, 12, 16, 20, इत्यादि से भी आरम्भ कर सकते हैं। प्रत्येक स्थिति में हम देखते हैं कि इस प्रकार बनाए गए घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का गुणनफल घनाभ के आयतन में घन मात्रकों की संख्या के समान है।

अत: हम कहते हैं कि **घनाभ का आयतन*** **V**

$$V = l \times b \times h \text{ घन मात्रक}$$

होता है, जहाँ l, b और h मात्रक क्रमश : घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई (गहराई) हैं।

टिप्पणी 1 : घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई एक ही मात्रकों में होनी चाहिए। इस प्रकार, यदि लम्बाई सेंटीमीटरों में है तो चौड़ाई और ऊँचाई भी सेंटीमीटरों में होनी चाहिए। तब आयतन घन सेंटीमीटर में होगा।

---

*उपरोक्त सूत्र तब भी सत्य है जब l, b और h पूर्ण संख्याओं के अतिरिक्त अन्य संख्याएँ हैं।

टिप्पणी 2 : आपको याद होगा कि घन एक विशेष प्रकार का घनाभ होता है जिसके सभी किनारे (edges) समान होते हैं, अर्थात् जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊंचाई समान होती हैं। इस प्रकार l मात्रक भुजा वाले घन का आयतन V

$V = l \times l \times l = l^3$ घन मात्रक होता है।

टिप्पणी 3 : अब हम ऐसे प्रश्नों का उत्तर दे सकते हैं जैसे कि "एक घन सें० मी० में कितने घन मि० मी० होते हैं ?" एक घन सें० मी० एक ऐसे घन का आयतन है जिसकी भुजा 1 सें० मी० अर्थात्, 10 मि० मी० है। इस प्रकार, घन मि० मी० में इसका आयतन $10 \times 10 \times 10$ घन मि० मी० अर्थात् 1000 घन मि० मी० है। इस प्रकार,

1 घन सें० मी० = 1000 घन मि० मी० = 10^3 घन मि० मी०

इसी प्रकार, हम ज्ञात कर सकते हैं कि

1 घन कि० मी० = 1000000000 घन मी० = 10^9 घन मी०

1 घन मी० = 1000000 घन सें० मी० = 10^6 घन सें० मी०

द्रवों (liquids) के आयतन मापने के लिए हम प्रायः 1 घन सें० मी० के लिए मिलीलीटर शब्द का प्रयोग करते हैं। साथ ही 1 लीटर = 1000 मिलीलीटर और 1 किलोलीटर = 1000 लीटर होता है। इस प्रकार, हमें निम्न सारणी प्राप्त होती है :

1 किलोलीटर (कि० ली०) = 1000 लीटर (ली०)

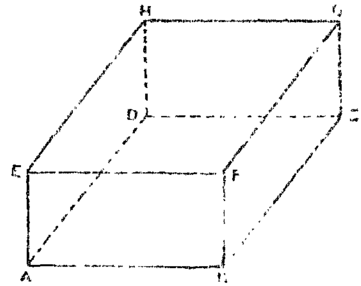
1 लीटर = 1000 मिलीलीटर (मि० ली०) = 1000 घन सें० मी०

कोष्ठकों में दिए गए शब्द विभिन्न मात्रकों के संक्षिप्त रूप हैं।

12.4 घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

हम सीख चुके हैं कि एक घनाभ, उदाहरणार्थ आकृति 12.3 में ABCDEFGH, के छः फलक होते हैं जो समांतर सर्वांगसम आयतों के तीन

युग्म ABCD, EFGH; ABFE, DCGH; और ADHE, BCGF बनाते हैं । इन फलकों से घनाभ का पृष्ठ (**surface of the cuboid**) बनता है । इन फलकों का सम्पूर्ण क्षेत्रफल घनाभ का **सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल** (**whole surface area**) अथवा संक्षेप में **पृष्ठीय क्षेत्रफल** है ।



आकृति 12.3.

यदि घनाभ को मान लीजिए,एक मेज पर इस प्रकार रखा जाए कि फलक ABCD को मेज पर टिका दिया जाता है, तो ABCD घनाभ का **आधार** कहलाता है । इसके सामने का फलक **उपरि भाग** तथा अन्य चार फलक **पार्श्वीय फलक** (**lateral faces**) कहलाते हैं । पार्श्वीय फलकों का क्षेत्रफल घनाभ का **पार्श्वीय पृष्ठ क्षेत्रफल** (**lateral surface area**) अथवा संक्षेप में **पार्श्वीय पृष्ठ** (**lateral surface**) कहलाता है ।

यदि घनाभ की लम्बाई $AB = l$ मात्रक, चौड़ाई $= AD = b$ मात्रक और ऊंचाई $= AE = h$ मात्रक हो, तो **घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल S** निम्न होगा :

S = फलकों के तीनों युग्मों के क्षेत्रफलों का योग

$= 2 \times l \times b + 2 \times b \times h + 2 \times h \times l$

$= \mathbf{2(l \times b + b \times h + h \times l)}$ **वर्ग मात्रक**

पार्श्वीय पृष्ठ का क्षेत्रफल A निम्न होगा :

$A = 2 \times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई $+ 2 \times$ ऊँचाई $\times$ लम्बाई

$= 2(b \times h + h \times l)$ वर्ग मात्रक

$= \mathbf{2\ (b + l)\ h}$ **वर्ग मात्रक**

इस सूत्र का प्रयोग एक कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल ज्ञात करने में भी किया जा सकता है ।

टिप्पणी : एक घन के लिए हम जानते हैं कि

$l = b = h = a$ (मान लीजिए)

अतः, एक घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $S=6\ a^2$ वर्ग मात्रक तथा ... पार्श्वीय पृष्ठ क्षेत्रफल $A=4\ a^2$ वर्ग मात्रक होगा ।

हम कुछ उदाहरण लेते हैं ।

उदाहरण 1 : एक टंकी का आयतन (धारिता) लीटरों में ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और गहराई क्रमशः 6.3 मी०, 4.5 मी० और 3.6 मी० हैं ।

हल : टंकी का आयतन $=6.3\times4.5\times3.6$ घन मी०

$=102.06$ घन मी०

$=102.06\times10^6$ घन सें० मी०

$=102.06\times10^3$ लीटर (क्यों ?)

$=102060$ लीटर

इस प्रकार, टंकी की धारिता 102060 लीटर है ।

उदाहरण 2 : उस घन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 150 वर्ग मी० है ।

हल : मान लीजिए घन के एक किनारे की लम्बाई a है । तब सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $6a^2$ होगा जो 150 वर्ग मी० दिया हुआ है ।

अतः, $6a^2=150$ अथवा $a^2=25$ अथवा $a=5$*

अतः, घन का किनारा 5 मी० है ।

इस प्रकार, घन का आयतन $=a^3=5^3$ घन मी० $=125$ घन मी०

उदाहरण 3 : एक कमरे की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 5 मी० और 4 मी० हैं तथा ऊँचाई 3 मी० है । 0.50 रु० प्रति वर्ग मी० की दर से इसकी दीवारों और ... छत पर सफेदी कराने की लागत ज्ञात कीजिए ।

हल : चारों दीवारों का क्षेत्रफल $=2\ (5+4)\ 3$ वर्ग मी०

$=54$ वर्ग मी०

छत का क्षेत्रफल $=5\times4=20$ वर्ग मी०

अतः, सम्पूर्ण क्षेत्रफल जिस पर सफेदी की जानी है

$=54+20=74$ वर्ग मी०

अतः, सफेदी की लागत $=0.50\times74$ रु०

$=37$ रु०

---

*क्या a, -5 के समान हो सकता है ?

प्रश्नावली 12.1

1. एक घनाभ का आयतन तथा सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: निम्न हैं :
   (i) 1210 मि॰ मी॰, 543 मि॰ मी॰, 2560 मि॰ मी॰
   (ii) 12 सें॰ मी॰, 10 सें॰ मी॰, 8 सें॰ मी॰
   (iii) 16.5 सें॰ मी॰, 8.4 सें॰ मी॰, 12.7 सें॰ मी॰
   (iv) 18.5 मी॰, 8.3 मी॰, 2.9 मी॰
   (v) 8 मी॰, 70 सें॰ मी॰, 90 सें॰ मी॰
2. एक घन का आयतन घन सें॰ मी॰ में और पृष्ठीय क्षेत्रफल वर्ग सें॰ मी॰ में ज्ञात कीजिए जिसके किनारे की लम्बाई निम्न है :
   (i) 15 मि॰ मी॰ (ii) 12.5 सें॰ मी॰ (iii) 2.6 मी॰
   (iv) 1.72 मी॰
3. एक घन के आयतन में क्या वृद्धि होगी यदि इसके किनारे की लम्बाई 100 सें॰ मी॰ से बढ़ाकर 101 सें॰ मी॰ कर दी जाए ? इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में क्या वृद्धि होगी ?
4. एक घन के आयतन में क्या परिवर्तन होगा यदि इसके किनारे की लम्बाई :
   (i) दुगुनी कर दी जाए ? (ii) आधी कर दी जाए ?
   उसके सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल में तदनुरूपी क्या परिवर्तन होगा ?
5. 80 सें॰ मी॰ लम्बी, 20 सें॰ मी॰ चौड़ी और 6 मि॰ मी॰ मोटी स्टील की एक पट्टी (strip) का भार ज्ञात कीजिए यदि स्टील का भार 7.8 ग्रा॰ प्रति घन सें॰ मी॰ है।
6. एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 100 सें॰ मी॰, 80 सें॰ मी॰ और 64 सें॰ मी॰ हैं। एक ऐसे घन के किनारे की लम्बाई ज्ञात कीजिए जिसका आयतन इस घनाभ के आयतन के समान है।
7. एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 64 सें॰ मी॰, 27 सें॰ मी॰ और 8 सें॰ मी॰ हैं। इसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल समान आयतन के एक घन के सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल से कितना अधिक है ?

8. समतल छत वाला एक आयताकार कोठार (barn) 10 मी० चौड़ा, 15 मी० लम्बा और 5 मी० ऊँचा है। इसके अन्दर, बाहर और आंतरिक छत पर पेन्ट किया जाना है परन्तु फर्श अथवा बाहरी छत पर नहीं। पेंट किया जाने वाला कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

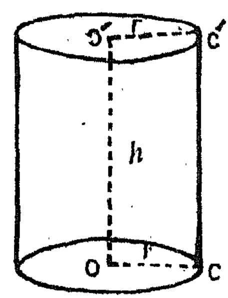
9. एक कमरे की दीवारों और आंतरिक छत पर सीमेंट से पलस्तर किया जाना है। इसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमश: 4.5 मी० और 3 मी० हैं, तथा ऊँचाई 3.5 मी० है। कमरे में 0.75 मी० चौड़ी और 1.25 मी० ऊँची दो खिड़कियाँ हैं तथा 0.90 मी० चौड़ा और 2 मी० ऊँचा एक दरवाजा है। वह क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिस पर पलस्तर किया जाना है।

10. एक आयताकार समांतरषट्फलक (घनाभ) की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई 1 : 2 : 3 के अनुपात में हैं और सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 1408 वर्ग सें० मी० है। लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

*11. 14 सें० मी० लम्बी और 10 सें० मी० चौड़ी धातु की एक आयताकार चादर के कोनों से x सें० मी० भुजा के वर्ग काट कर बिना ढक्कन का एक बक्स बनाया जाता है। दिखाइए कि बक्स का आयतन $140x-48x^2+4x^3$ घन सें० मी० है।

12.5 लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल

दैनिक जीवन में हम अनेक वस्तुएँ देखते हैं, उदाहरणतया, पाइप, टीन के डिब्बे, इत्यादि जिनके फलक आयताकार नहीं होते। वे ठोसों की उस श्रेणी में आते हैं जिन्हें **लम्ब वृत्तीय बेलन (right circular cylinders)** कहा जाता है। (देखिए आकृति 12.4) हम देखते हैं कि एक लम्ब वृत्तीय बेलन के सिरे (आधार) सर्वांगसम वृत्त हैं और इन वृत्तों के केन्द्रों O और O′ को मिलाने वाली रेखा दोनों सिरों पर लम्ब है। रेखा OO′ **बेलन की अक्ष (axis of the cylinder)** कहलाती है और रेखाखंड OO′ की लम्बाई, मान



आकृति 12.4

लीजिए h, बेलन की ऊँचाई अथवा लम्बाई कहलाती है। प्रत्येक वृत्तीय सिरे की त्रिज्या, $OC = O'C' = r$ (मान लीजिए) बेलन की त्रिज्या कहलाती है।

हम पहले ही सीख चुके हैं कि एक घनाभ का आयतन V निम्न सूत्र द्वारा प्राप्त होता है :

$$V = l \times b \times h = (l \times b) \times h$$

अर्थात्, आयतन = (आधार का क्षेत्रफल) × ऊँचाई

यह सूत्र एक लम्ब वृत्तीय बेलन के आयतन के लिए भी सत्य* है। यहाँ आधार r त्रिज्या का वृत्त है। अतः, इसका क्षेत्रफल πr^2 है।

अतः, लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन V निम्न है :

$$V = \pi r^2 h \text{ घन मात्रक}$$

अब हम बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल पर विचार करते है। हम देखते हैं कि इसका पार्श्वीय पृष्ठ वक्रित (curved) है। इस पृष्ठ का क्षेत्रफल वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल (**area of the curved surface**) अथवा संक्षेप में, लम्ब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठ (**curved surface of the right circular cylinder**) कहलाता है।

वक्र पृष्ठ को निर्धारित करने के लिए, आइए कल्पना करें कि पृष्ठ पर बेलन की अक्ष के समांतर एक रेखा के अनुदिश बेलन को काटा जाता है और कटे हुए पृष्ठ को एक समतल पृष्ठ के रूप में फैला दिया जाता है। हम क्या प्राप्त करते हैं ? हम एक आयत प्राप्त करते हैं। हम देखते हैं कि इस आयत की एक भुजा लम्ब वृत्तीय बेलन के आधार की परिधि के समान है। इस आयत की दूसरी भुजा के विषय में आप क्या समझते हैं ? हम देखते हैं कि इस आयत की दूसरी भुजा बेलन की ऊँचाई के समान है। इस प्रकार, लम्ब वृत्तीय बेलन के वक्र पृष्ठ** का क्षेत्रफल C निम्न है :

$$C = \text{उपरोक्त आयत का क्षेत्रफल}$$
$$= \text{एक भुजा} \times \text{दूसरी भुजा}$$

---

*इस कथन की उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।

**कक्षा में क्रियाकलाप हेतु सुझाव : 20 सें० मी० लम्बा और 8 सें० मी० चौड़ा या किसी अन्य सुविभाजनक साइज का एक आयताकार कागज लीजिए। इसे मोड़कर खुले सिरों वाला एक बेलन बनाइए। इस बेलन का व्यास मापिए और वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल के लिए उपर्युक्त सूत्र की जाँच कीजिए।

=वृत्तीय आधार की परिधि × ऊँचाई
=2 πrh वर्ग मात्रक

स्पष्ट है कि, यदि हम वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल में दोनों सिरों का क्षेत्रफल जोड़ दें तो हमें लम्ब वृत्तीय बेलन का **सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल** प्राप्त हो जाएगा।

इस प्रकार बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल S निम्न है :

$$\mathbf{S = 2\pi r^2 + 2\pi rh}$$

$$\mathbf{= 2\pi r\,(r+h)}$$ **वर्ग मात्रक**

हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : एक बेलन का आयतन, वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल तथा सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी ऊँचाई और आधार की त्रिज्या क्रमशः 14 सें०मी० और 4 सें० मी० हैं। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

हल : आयतन = $\pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 14$ घन सें० मी०

= 704 घन सें० मी०

वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi r\,h$

= $2 \times \frac{22}{7} \times 4 \times 14$ वर्ग सें० मी०

= 352 वर्ग सें० मी०

सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठ + दोनों सिरों का क्षेत्रफल

= $2\pi r\,h + 2\pi r^2$

= $(352 + 2 \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4)$ वर्ग सें० मी०

= $(352 + 100.57)$ वर्ग सें० मी०

= 452.57 वर्ग सें मी०

उदाहरण 2 : बिना ढक्कन के एक बेलनाकार बर्तन की धारिता लीटरों में ज्ञात कीजिए जिसके भीतर की त्रिज्या 8.4 सें० मी० और गहराई 20 सें० मी० है। यदि बर्तन 2 मि० मी० मोटाई की धातु से बना है, तो बर्तन में लगे धातु का आयतन ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

हल : बर्तन की धारिता

$=$ अ[illegible] के [illegible] आयतन

$= \pi r^2 h = (\frac{22}{7} \times 8.4 \times 8.4 \times 20)$ घन सें० मी०

$= 4435.2$ घन सें० मी०

अतः, बर्तन की धारिता 4.4352 लीटर है।

पुनः बाहर के बेलन की त्रिज्या 8.6 सें० मी० है और उसकी ऊँचाई 20.2 सें० मी० है। (क्यों ?)

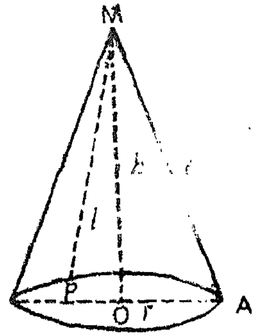
अतः इसका आयतन $= \frac{22}{7} \times 8.6 \times 8.6 \times 20.2$ घन सें० मी० $= 4695.4$ घन सें० मी०। इस प्रकार, बर्तन के बनाने में प्रयोग की गई धातु का आयतन

$= (4695.4 - 4435.2)$ घन सें० मी०

$= 260.2$ घन सें० मी०

12.6 लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल

दैनिक जीवन में हम कुछ वस्तुएँ ऐसी भी देखते हैं जैसे कि आइसक्रीम कोन, जोकर की टोपी, इत्यादि। ये ठोसों की उस श्रेणी में आते हैं जिन्हें लम्ब वृत्तीय शंकु (right circular cones) कहा जाता है। (देखिए आकृति 12.5) हम देखते हैं कि एक लम्ब वृत्तीय शंकु का आधार एक वृत्त है और इस वृत्त के केन्द्र O को शीर्ष M से मिलाने वाला रेखाखंड आधार पर लम्ब है। रेखाखंड MO की लम्बाई $= h$ (मान लीजिए) शंकु की ऊँचाई तथा वृत्त की त्रिज्या r (मान लीजिए) शंकु की त्रिज्या कहलाती है। पुनः, शीर्ष को वृत्त के किसी बिन्दु से मिलाने वाला रेखाखंड शंकु की तिर्यक ऊँचाई (slant height) कहलाती है। आकृति 12.5 में MP $=$ MA $= l$ (मान लीजिए) शंकु की तिर्यक ऊँचाई है। हम देखते हैं कि $l^2 = r^2 + h^2$ (पाइथागोरस गुण द्वारा जिसे हम अगली कक्षाओं में पढ़ेंगे)।



आकृति 12.5

प्रायोगिक* रूप से यह जाँच की जा सकती है कि एक लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन उसी आधार और उसी ऊँचाई के एक लम्ब वृत्तीय बेलन के आयतन का एक तिहाई होता है। अतः, एक लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन V निम्न द्वारा प्राप्त होता है :

$$V = \frac{1}{3}(\text{आधार का क्षेत्रफल}) \times \text{ऊँचाई}$$

अर्थात्, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ घन मात्रक

जहाँ, r शंकु की त्रिज्या और h उसकी ऊँचाई है।

पुनः हम देखते हैं कि एक शंकु का पार्श्वीय पृष्ठ वक्रित है। हम बिना उपपत्ति दिए यह कथन देते हैं कि एक लम्ब वृत्तीय शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल उसकी तिर्यक ऊँचाई और उसके आधार की परिमाप के आधे का गुणनफल होता है। इस प्रकार, वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल C निम्न है :

$$C = \frac{1}{2}(2\pi r)\, l = \pi r l \text{ वर्ग मात्रक}$$

जहाँ, r शंकु की त्रिज्या और l उसकी तिर्यक ऊँचाई है।

स्पष्ट है कि यदि हम वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल में, आधार का क्षेत्रफल जोड़ दें, तो हमें शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल प्राप्त होता है। इस प्रकार, शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल S निम्न है :

$$S = \pi r l + \pi r^2$$

$$= \pi r (l + r) \text{ वर्ग मात्रक}$$

हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण : एक लम्ब वृत्तीय शंकु, जिसकी त्रिज्या 7 सें० मी० और ऊँचाई 24 सें० मी० है, का आयतन, वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल और सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7} \text{ लीजिए}\right)$

---

*कक्षा में क्रियाकलाप हेतु सुझाव : एक खोखला लम्ब वृत्तीय बेलन और उसी आधार और ऊँचाई का एक लम्ब वृत्तीय शंकु लीजिए। शंकु को पानी (अथवा रेत) से भरिए तथा इसे बेलन में डाल दीजिए। ऐसा तीन बार कीजिए। आप क्या देखते हैं ?

हल : आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 49 \times 24\right) \text{ घन सें॰ मी॰}$$

$$= 1232 \text{ घन सें॰ मी॰}$$

अब,

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{49 + 576}$$

$$= \sqrt{625}$$

$$= 25$$

अर्थात्, शंकु की तिर्यक ऊँचाई 25 सें॰ मी॰ है।

अतः वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 \text{ वर्ग सें॰ मी॰}$$

$$= 550 \text{ वर्ग सें॰ मी॰}$$

सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l + \pi r^2$

$$= 550 + \frac{22}{7} \times 49$$

$$= (550 + 154) \text{ वर्ग सें॰ मी॰}$$

$$= 704 \text{ वर्ग सें॰ मी॰}$$

12.7 गोले का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल

हम गोलों (spheres) से पहले ही परिचित हैं। ऐसे ठोस जैसे कि फुटबाल, क्रिकेट बाल, इत्यादि गोलों के उदाहरण हैं। जैसा कि वृत्त के लिए होता है, गोले का प्रत्येक बिंदु एक निश्चित बिंदु से समदूरस्थ होता है। यह निश्चित बिंदु गोले का केन्द्र कहलाता है। स्थिर दूरी उसकी त्रिज्या कहलाती है।

अब हम बिना उपपत्ति दिए एक गोले के आयतन तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल के सूत्रों के कथन देते हैं।

एक गोले का आयतन V निम्न है:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ घन मात्रक}$$

एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल S निम्न है:

$$S = 4\pi r^2 \text{ वर्ग मात्रक}$$

जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण. 2.3 मी० त्रिज्या के एक गोले का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल : आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{(4 \times 3.14 \times 2.3 \times 2.3 \times 2.3)}{3}$

$= 50.93917$ घन मी०

पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2 = (4 \times 3.14 \times 2.3 \times 2.3)$ वर्ग मी०

$= 66.4424$ वर्ग मी०

प्रश्नावली 12.2

1. एक लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन, वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल और सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी ऊँचाई और त्रिज्या क्रमशः नीचे दी गई हैं। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

   (i) 17.9 सें० मी०, 4.5 सें० मी० (ii) 1.4 मी०, 0.35 मी०
   (iii) 120 मि० मी०, 77 मि० मी०

2. एक लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन और सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी ऊँचाई और त्रिज्या क्रमशः नीचे दी गई हैं।

   ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

   (i) 240 मि० मी०, 70 मि०मी० (ii) 14 सें० मी०, 10.5 सें०मी०
   (iii) 21 मी०, 28 मी०

3. एक गोले का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या नीचे दी गई है। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

   (i) 5.6 सें० मी० (ii) 7.7 मी० (iii) 7 मी०

4. एक लम्ब वृत्तीय शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी ऊँचाई और त्रिज्या क्रमशः 12 सें० मी० और 5 सें० मी० हैं।

($\pi = 3.14$ लीजिए)

5. दो गोलों की त्रिज्याएँ 1 : 4 के अनुपात में हैं। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों की तुलना कीजिए।

6. एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 144 π वर्ग सें० मी० है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

7. बिना ढक्कन का एक बेलनाकार बर्तन धातु की एक चादर का बना हुआ है। यदि बर्तन की लम्बाई 48 सें०मी० और व्यास 28 सें० मी० है, तो वाँछित धातु का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

8. यह मानते हुए कि पृथ्वी 6400 कि० मी० त्रिज्या का एक गोला है, इसका आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. एक बेलनाकार टंकी की धारिता 1540 घन मी० है और इसके आधार का व्यास 14 मी० है। टंकी की गहराई ज्ञात कीजिए।

($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

0. एक लम्ब वृत्तीय शंकु के आधार का क्षेत्रफल 28.26 वर्ग मी० है। यदि इसकी ऊँचाई 4 मी० है, तो इसका आयतन तथा वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

11. बृहस्पति का व्यास पृथ्वी के व्यास से 11 गुना है। बृहस्पति के आयतन का पृथ्वी के आयतन से अनुपात ज्ञात कीजिए।

12. एक गोले के आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल में क्या परिवर्तन होगा यदि उसकी त्रिज्या

(i) दुगुनी कर दी जाए ? (ii) आधी कर दी जाए ?

13. यदि S एक गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल के (अंकीय) माप को तथा V इसके आयतन के माप को प्रदर्शित करता है तो दिखाइए कि $S^3 = 36\pi V^2$ है।

14. एक अर्ध [illegible]कार* बर्तन (bowl) का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 6.3 सें० मी० है। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ लीजिए $\left.\right)$

15. शंकु के आकार के एक तम्बु के आधार की त्रिज्या 5 मी० है। यदि तम्बु 12 मी० ऊँचा है, तो तम्बु में लगे कपड़े (canvas) का क्षेत्र-फल ज्ञात कीजिए। तम्बु के भीतर की वायु का आयतन भी ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

*16. एक लम्ब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई क्रमशः 4.2 सें० मी० और 5.6 सें० मी० हैं। बेलन धातु का बना हुआ है। इसे पिघलाकर एक गोले में परिवर्तित किया जाता है। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ लीजिए $\left.\right)$

मुख्य संकल्पनाएँ

आयतन	सम्पूर्ण पृष्ठ	
आयतन के मात्रक	घनाभ	का आयतन
पृष्ठीय क्षेत्रफल	घन	
पार्श्वीय पृष्ठ	लम्ब वृत्तीय बेलन	तथा
वक्र पृष्ठ	लम्ब वृत्तीय शंकु	
	गोले	पृष्ठीय क्षेत्रफल

*यदि एक गोले के बीच में से काट कर दो समान भाग कर दिए जाएँ, तो प्रत्येक भाग एक अर्ध गोला (hemisphere) कहलाता है।

एकक XIII

यथा प्राप्त आँकड़े और उनका अंकगणितीय माध्य

इस एकक में, हम यथा प्राप्त आँकड़ों और उनके अंकगणितीय माध्य के विषय में सीखेंगे। अंकगणितीय माध्य के कुछ महत्वपूर्ण गुणों को दर्शाया गया है और दैनिक जीवन से क्रिया-कलापों से परिपूर्ण कुछ उदाहरण दिए गए हैं।

13.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में हम पहले ही यह सीख चुके हैं कि दी गई सूचना अथवा आँकड़ों को चित्रालेखों, दंड-चार्टों अथवा दंड-आलेखों द्वारा किस प्रकार निरूपित किया जाता है। हमने किसी दी गई सूचना को सारणियों के रूप में भी निरूपित किया था। अपने दैनिक जीवन में हम प्रायः समाचार पत्रों, पत्रिकाओं, बुलैटिनों, इत्यादि में आलेखों तथा सारणियों को देखते हैं। इन आलेखों और सारणियों द्वारा हम एक ही दृष्टि में सूचना के विषय में जानने में समर्थ हो जाते हैं।

आइए मान लें कि हमारी यह जानने में रुचि है कि एक कक्षा के 20 विद्यार्थियों में से पिछली वार्षिक परीक्षा में गणित में अधिकतम अंक किसके थे तथा न्यूनतम अंक किसके थे। और भी बहुत सी सूचनाओं के विषय में हमारी रुचि हो सकती है, जैसे कि कितने विद्यार्थियों के अंक 60 या इससे अधिक थे तथा इन 20 विद्यार्थियों के अंकों का औसत क्या था, इत्यादि, इत्यादि। हम वांछित जानकारी कैसे प्राप्त करते हैं? हम 20 में से प्रत्येक विद्यार्थी से पूछते हैं कि

पिछली वार्षिक परीक्षा में उसके गणित में अंक कितने थे। आइए मान लें कि इन 20 विद्यार्थियों के (100 में से) निम्नलिखित अंक थे :

45, 56, 61, 31, 56, 33, 70, 61, 76, 36, 56, 59, 64, 56, 88, 28, 56, 70, 64, 74

उपरोक्त उदाहरण में प्रत्येक विद्यार्थी से प्राप्त की गई सूचना एक **प्रेक्षण (observation)** कहलाती है। आरम्भ में प्राप्त किए गए ऐसे प्रेक्षण **यथा प्राप्त आँकड़े (raw data)** कहलाते हैं।

हम इन 20 विद्यार्थियों के नामों की सूची बना सकते हैं और उनके नामों के सामने, निम्नतम से आरम्भ करके, उनके अंकों को दर्शा सकते हैं। इस प्रकार, उपरोक्त सूचना को हम नीचे दी गई सारणी के रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

13.1 : 20 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त अंक

नाम	प्राप्तांक
मनोज	28
रघु	31
सुन्दर	33
रमेश	36
हरि	45
रजनी	56
सुधा	56
राजन	56
मधु	56
उर्मिल	56
सोहन	59
राम	61
अब्दुल	61
अनु	64
सोनल	64
अरुण	70
प्रकाश	70
प्रेम	74
रेहाना	76
रवि	88

आइए, अब सारणी 13.1 को देखें। यह क्या दर्शाती है ? सारणी पर एक दृष्टि डालने से ज्ञात होगा कि अधिकतम प्राप्तांक 88 हैं जबकि न्यूनतम प्राप्तांक 28 हैं। प्रेक्षणों के अधिकतम और न्यूनतम मानों के अंतर को परिसर (range) कहा जाता है। उपरोक्त उदाहरण में अंकों का परिसर $88-28=60$ है। हम यह भी जानना चाहते थे कि कितने विद्यार्थियों ने 60 या इससे अधिक अंक प्राप्त किए। सारणी में हम ऐसे विद्यार्थियों की संख्या गिन सकते हैं। हम देखते हैं कि 20 में से 9 विद्यार्थियों ने 60 या इससे अधिक अंक प्राप्त किए हैं। अब, इन 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का औसत क्या है ? हम इसकी चर्चा अगले अनुच्छेद में करेंगे।

13.2 अंकगणितीय माध्य

हम औसत के विषय में पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं। इसे प्रायः अंकगणितीय माध्य (arithmetic mean) अथवा केवल माध्य (mean) कहा जाता है जिसे प्रायः M से व्यक्त किया जाता है। इसके अतिरिक्त और बहुत से औसत हैं जिनके विषय में हम बाद में पढ़ेंगे। इन प्रेक्षणों का माध्य ज्ञात करने के लिए आपको निम्न नियम याद होगा :

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

उपरोक्त उदाहरण में प्रेक्षणों की संख्या 20 है। अतः,

$$M = \frac{28+31+33+\ldots+70+70+74+76+88}{20}$$

$$= \frac{1140}{20}$$

$$= 57$$

इस प्रकार, 20 विद्यार्थियों के गणित में प्राप्तांकों का माध्य 57 अंक है।

टिप्पणी : पाठक ध्यान दें कि उपरोक्त उदाहरण में माध्य 57 है, जो कि यथा प्राप्त आँकड़ों के सभी प्रेक्षणों से भिन्न है। परन्तु यह भी सम्भव है कि कभी-कभी माध्य विभिन्न प्रेक्षणों में से ही एक हो।

अब आइए उपरोक्त उदाहरण की एक और तरह से जाँच करें। माध्य अंक 57 हैं। यदि हम यह मान लें कि 20 में से प्रत्येक विद्यार्थी के प्राप्तांक 57 हैं, तो स्पष्ट है कि उनके कुल अंक $57 \times 20 = 1140$ होंगे। अब, यदि हम सारणी 13.1 में दिए गए उनके वास्तविक अंकों को जोड़ें, तो हम देखते है कि उनके कुल अंक भी 1140 हैं। इस प्रकार, हमें निम्न गुण प्राप्त होता है :

1. सभी प्रेक्षणों का योग उनके माध्य और प्रेक्षणों की संख्या के गुणनफलों के समान होता है।

अब हम माध्य के एक अन्य गुण को स्पष्ट करते हैं। आइए, उपरोक्त उदाहरण में सभी प्रेक्षणों का उनके माध्य से अंतर ज्ञात करें। हमें अंतरों की निम्न सारणी प्राप्त होती है :

सारणी 13.2 : 20 विद्यार्थियों के अंकों (X) के उनके माध्य (M) से अंतरों की सारणी

अंक (X)	माध्य (M)	अंतर (X—M)
28	57	—29
31	57	—26
33	57	—24
36	57	—21
45	57	—12
56	57	— 1
56	57	— 1
56	57	— 1
56	57	— 1
56	57	— 1

59	57	+2
61	57	+4
61	57	+4
64	57	+7
64	57	+7
70	57	+13
70	57	+13
74	57	+17
76	57	+19
88	57	+31

आइए धन चिन्हों वाले सभी अंतरों को जोड़ें। इनका योग 117 है। यदि हम ऋण चिन्हों वाले सभी अंतरों को जोड़ें, तो इनका योग —117 है। स्पष्ट है कि धन और ऋण अंतरों का योग शून्य है। इस प्रकार, हमें निम्न गुण प्राप्त होता है :

2. सभी प्रेक्षणों के उनके माध्य से अंतरों का योग शून्य होता है।

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : एक विद्यालय के 18 अध्यापकों की आयु (वर्षों में) निम्नलिखित है :

32, 41, 28, 54, 33, 28, 23, 33, 37, 40, 36, 35, 31, 43, 26, 29, 30, 33

(i) सबसे वड़े अध्यापक की आयु तथा सबसे छोटे अध्यापक की आयु क्या है ?

(ii) परिसर क्या है ?

(iii) इन अध्यापकों की माध्य आयु क्या है ?

हल : (i) स्पष्ट है कि विद्यालय में सबसे वड़े अध्यापक की आयु 54 वर्ष तथा सबसे छोटे अध्यापक की आयु 23 वर्ष है।

(ii) परिसर $54-23=31$ है।

(iii) $M=\dfrac{32+41+28+\ldots+29+30+33}{18}$

$$= \frac{612}{18}$$

$$= 34$$

इस प्रकार, विद्यालय में 18 अध्यापकों की माध्य आयु 34 वर्ष है।

उदाहरण 2 : एक पासा*, जिसके छः फलकों पर 1 से 6 तक संख्याएँ अंकित हैं, 10 बार फेंका गया और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

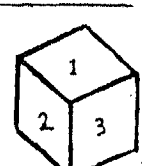
फेंके गए पासे का क्रम	प्राप्त परिणाम
पहला	3
दूसरा	4
तीसरा	2
चौथा	6
पाँचवाँ	1
छठा	5
सातवाँ	6
आठवाँ	3
नवाँ	4
दसवाँ	6

(i) कौन सा फलक अधिकतम बार आया ?

(ii) माध्य अंक क्या है ?

हल : (i) सारणी दर्शाती है कि वह फलक जिस पर 6 अंकित है, अधिकतम बार अर्थात् 3 बार आया।

* पासा एक घन होता है जिसके छः फलकों पर 1 से 6 तक संख्याएँ (अथवा बिंदु) अंकित होते हैं, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है।



(ii) यहाँ प्रेक्षणों की संख्या 10 है। इस प्रकार,

$$M=\frac{3+4+2+6+1+5+6+3+4+6}{10}$$

$$=\frac{40}{10}$$

$$=4$$

अतः, पासे को उपरोक्त 10 बार फेंकने से प्राप्त माध्य अंक 4 है।

उदाहरण 3 : एक गाँव में 24 परिवारों के सदस्यों की संख्या निम्न-लिखित है :

6, 8, 6, 3, 2, 5, 7, 8, 6, 5, 5, 7, 7, 8, 6, 6, 7, 7, 6, 5, 6, 6, 8, 4

(i) छोटे से छोटे परिवार का साइज़ क्या है ? कितने परिवार न्यूनतम साइज़ के हैं ?

(ii) सामान्यतम (most common) परिवार का क्या साइज़ है ?

(iii) परिवारों का माध्य साइज़ क्या है ?

(iv) माध्य साइज़ से बड़े साइज़ के परिवारों की संख्या क्या है ?

हल : (i) आँकड़ों पर दृष्टि डालने से हमें ज्ञात होता है कि गाँव में परिवार का छोटे से छोटा साइज़ 2 है और केवल एक परिवार इस साइज़ का है।

(ii) विभिन्न साइज़ों के परिवारों में अधिकतम परिवारों का साइज़ 6 है। ऐसे परिवारों की संख्या 8 है। इस प्रकार, सामान्यतम परिवार का साइज़ 6 है।

(iii) परिवारों का माध्य साइज़ निम्न है :

$$M=\frac{6+8+6+\ldots+6+8+4}{24}$$

$$=\frac{144}{24}$$

$$=6$$

इस प्रकार, परिवारों का माध्य साइज़ 6 है।

(iv) माध्य साइज़ से बड़े साइज़ के परिवार वे हैं जिनके साइज़ 7 और 8 हैं। ऐसे परिवारों की संख्या 9 है।

उदाहरण 4 : दिल्ली में अगस्त 1978 के 7 दिनों की वर्षा (मि॰ मी॰) में निम्नलिखित है :

तिथि	वर्षा(मि॰ मी॰ में)
11	2.2
12	21.3
13	25.6
14	0.0
15	4.9
16	0.0
17	5.5

(i) उपरोक्त आँकड़ों में वर्षा का परिसर क्या है ?

(ii) इन दिनों में वर्षा का माध्य क्या है ?

(iii) कितने दिन वर्षा माध्य वर्षा से कम हुई ?

हल : (i) परिसर 25.6−0.0=25.6 मि॰ मी॰ है।

(ii) माध्य वर्षा $= \dfrac{2.2+21.3+25.6+0.0+4.9+0.0+5.5}{7}$

$= \dfrac{59.5}{7}$

$= 8.5$ मि॰ मी॰

(iii) उपरोक्त आँकड़ों पर दृष्टि डालने से हमें ज्ञात होता है कि 5 दिन वर्षा माध्य वर्षा (8.5 मि॰ मी॰) से कम हुई।

उदाहरण 5 : एक कक्षा के 12 लड़कों के भार (कि॰ ग्रा॰ में) निम्नलिखित हैं :

48.2, 50, 44.5, 49.3, 50.4, 45, 51, 42, 46.8, 48.4, 52, 50.8

(i) माध्य भार ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि अध्यापक, जिसका भार 62.5 कि॰ ग्रा॰ है, को भी इनमें सम्मिलित कर लिया जाए तो माध्य भार क्या होगा ?

(iii) इन लड़कों में से 1 लड़का कक्षा से चला जाता है। शेष 11 लड़कों का माध्य भार क्या होगा यदि उस लड़के का भार

(क) 50.4 कि० ग्रा० है ?

(ख) 48.2 कि० ग्रा० है ?

हल : (i) 12 लड़कों का माध्य भार

$$= \frac{48.2+50+44.5+\ldots+48.4+52+50.8}{12}$$

$$= \frac{578.4}{12}$$

$$= 48.2$$

इस प्रकार, 12 लड़कों का माध्य भार 48.2 कि० ग्रा० है।

(ii) 12 लड़कों तथा अध्यापक का कुल भार

= 578.4 कि० ग्रा० + 62.5 कि० ग्रा०

= 640.9 कि० ग्रा०

अतः माध्य भार

$$= \frac{640.9}{13}$$

$$= 49.3$$

इस प्रकार, 12 लड़कों तथा अध्यापक का माध्य भार 49.3 कि० ग्रा० है।

(iii) (क) 12 लड़कों का कुल भार = 578.4 कि० ग्रा०

जो लड़का कक्षा से चला जाता है उसका भार = 50.4 कि० ग्रा०

अतः, 11 लड़कों का कुल भार = 578.4 कि० ग्रा० — 50.4 कि० ग्रा०

= 528.0 कि० ग्रा०

इस प्रकार, उनका माध्य भार $= \frac{528.0}{11}$

= 48 कि० ग्रा०

(ख) 12 लड़कों का कुल भार = 578.4 कि० ग्रा०

जो लड़का कक्षा से बाहर चला जाता है उसका भार = 48.2 कि० ग्रा०

अतः, 11 लड़कों का कुल भार $=(578.4-48.2)$ कि॰ग्रा॰

$=530.2$ कि॰ ग्रा॰

इस प्रकार, उनका माध्य भार $=\frac{530.2}{11}$

$=48.2$ कि॰ ग्रा॰

टिप्पणी : पाठक ध्यान दें कि यदि एक प्रेक्षण को, जो माध्य के समान है, दिए गए प्रेक्षणों में से निकाल दिया जाए (अथवा उनमें जोड़ दिया जाए) तो उनके माध्य पर इसका कोई प्रभाव नहीं पड़ता ।

उदाहरण 6 : एक कारखाने के 15 कर्मचारियों का औसत मासिक वेतन 285 रु॰ है । यदि कारखाने के मैनेजर का वेतन भी सम्मिलित कर लिया जाए तो औसत 335 रु॰ हो जाता है । मैनेजर का वेतन क्या है ?

हल : 15 कर्मचारियों का कुल वेतन

$=(285\times15)$ रु॰

$=4275$ रु॰

यदि मैनेजर का वेतन सम्मिलित कर लिया जाए, तो स्पष्ट है कि प्रेक्षणों की संख्या 16 हो जाएगी । चूँकि उनका औसत वेतन 335 रु॰ है, अतः 15 कर्मचारियों तथा मैनेजर का कुल वेतन

$=(335\times16)$ रु॰

$=5360$ रु॰

अतः, मैनेजर का वेतन

$=(5360-4275)$ रु॰

$=1085$ रु॰

प्रश्नावली 13.1

1. एक विद्यालय 1974 में विद्यार्थियों की प्रारम्भिक संख्या 325 से आरम्भ हुआ । 1975 में विद्यार्थियों की संख्या 412 हो गई, 1976 में यह संख्या 508 थी और 1977 में यह बढ़कर 650 हो गई । 1978 में विद्यार्थियों की संख्या 700 थी और 1979 में 790 थी । इस सूचना को एक सारणी के रूप में दर्शाइए ।

2. गणित की एक परीक्षा में विद्यार्थियों के निम्नलिखित प्राप्तांक थे :
81, 72, 90, 90, 86, 85, 92, 70, 71, 83, 89, 95, 85, 79, 62

(i) प्राप्तांकों का परिसर क्या है ?

(ii) माध्य ज्ञात कीजिए।

(iii) यदि एक विद्यार्थी, जिसने 62 अंक प्राप्त किए हैं, के अंक बढ़ाकर 77 कर दिए जाएँ तो क्या माध्य पर इसका प्रभाव पड़ेगा ?

3. 17 लड़कियों की ऊँचाइयाँ मापी गईं और निम्नलिखित परिणाम (सें० मी० में) प्राप्त हुए :

143, 148, 135, 150, 128, 139, 149, 146, 132, 151, 142, 144, 156, 140, 136, 142, 133

(i) सबसे लम्बी लड़की की ऊँचाई क्या है ?

(ii) सबसे छोटी लड़की की ऊँचाई क्या है ?

(iii) कितनी लड़कियों की ऊँचाई 140 सें० मी० या उससे अधिक है ?

(iv) माध्य ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

(v) कितनी लड़कियों की ऊँचाई माध्य ऊँचाई से कम है ?

4. दिल्ली में नवम्बर 1978 के 10 क्रमागत दिनों के अधिकतम दैनिक तापमान (°C में) निम्नलिखित थे :

32.4, 29.5, 25.7, 26.3, 24.2, 23.4, 22.4, 22.5, 23.3, 22.8

(i) किस दिन का तापमान न्यूनतम था ? किस दिन का अधिकतम था ?

(ii) परिसर क्या है ?

(iii) माध्य दैनिक तापमान ज्ञात कीजिए।

5. कुछ समय की चिकित्सा के पश्चात 15 रोगियों के रक्त चापों (मि० मी० पारे में) (in mm mercury) में निम्नलिखित परिवर्तन पाया गया :
3, —6, 10, —1, —5, 0, 2, —4, 6, 7, —2, —7, 0, 14, 1

इन रोगियों के रक्त चापों में माध्य परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

6. फरवरी 1979 में प्रथम 15 दिनों में एक अस्पताल में उत्पन्न हुए बच्चों की संख्या निम्नलिखित थी :

15, 18, 13, 17, 17, 10, 11, 13, 14, 14, 20, 16, 13, 14, 20

इन दिनों में उत्पन्न हुए बच्चों की संख्या का माध्य ज्ञात कीजिए ।

7. एक परिवार के 6 सदस्यों का माध्य भार 31.9 कि० ग्रा० है । यदि एक नवजात शिशु का भार, 3.2 कि० ग्रा०, सम्मिलित कर लिया जाए तो क्या माध्य कम हो जाएगा या अधिक ? यह भी बताइए कि कितना ।

8. विद्यार्थियों के एक समूह की एक विशेष परीक्षा ली गई । विभिन्न विद्यार्थियों ने निम्नलिखित समय में (मिनटों में) परीक्षा पूरी की :

17, 19, 20, 22, 24, 24, 27, 28, 30, 30, 32, 34, 35, 36

(i) परीक्षा पूर्ण करने में लिया गया माध्य समय क्या था ?

(ii) कितने विद्यार्थियों ने, परीक्षा पूर्ण करने में माध्य समय से अधिक समय लिया ?

(iii) यदि एक विद्यार्थी ने, जिसने 36 मिनट लिए हैं, परीक्षा पूर्ण करने में केवल 22 मिनट लिए होते तो माध्य क्या होता ?

कक्षा में क्रिया-कलाप हेतु सुझाव

9. दो सिक्के लीजिए । उन्हें एक साथ ही 10 बार उछालिए तथा प्राप्त चित (heads) की संख्या को निम्न सारणी में लिखिए । उनका माध्य भी ज्ञात कीजिए ।

उछाल	चित की संख्या
पहली	
दूसरी	
तीसरी	
चौथी	
पाँचवीं	
छठी	
सातवीं	

आठवीं
नवीं
दसवीं

10. एक पासा 10 बार उछालिए तथा प्राप्तांकों को निम्न सारणी में लिखिए। परिसर तथा माध्य भी ज्ञात कीजिए।

उछाल	प्राप्त परिणाम
पहली	
दूसरी	
तीसरी	
चौथी	
पाँचवीं	
छठी	
सातवीं	
आठवीं	
नवीं	
दसवीं	

11. गणित की पिछली परीक्षा में प्राप्त अपनी कक्षा के सभी विद्यार्थियों के (स्वयं को मिलाकर) अंकों को संग्रह कीजिए। माध्य अंक ज्ञात कीजिए।

मुख्य संकल्पनाएँ

आँकड़ों का संग्रह	परिसर
प्रेक्षण	अंकगणितीय माध्य अथवा माध्य
यथा प्राप्त आँकड़े	माध्य के गुण

एकक XIV

बारंबारता बंटन और आयतचित्र

इस एकक मे, हम यह सीखेंगे कि यथा प्राप्त आँकड़ों को बारंबारता बंटनों में कैसे व्यवस्थित किया जाता है। अवर्गीकृत बारंबारता बंटन के माध्य का संक्षेप में वर्णन किया गया है। आँकड़ों के वर्गीकरण तथा आयतचित्रों द्वारा उनके आलेखीय निरूपण का वर्णन दैनिक जीवन के सरल उदाहरणों की सहायता से किया गया है।

14.1 भूमिका

पिछले एकक में हमने यथा प्राप्त आँकड़ों और उनके माध्य का वर्णन किया था। आइए, फिर गणित में 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों के उदाहरण पर विचार करें (देखिए अनुच्छेद 13.1)। यह सम्भव है कि किसी भी अन्वेषण (investigation) में दो या इससे अधिक प्रेक्षण सर्वसम (identical) अर्थात् एक जैसे हों। क्या इस तथ्य को आप सारणी 13.1 में देखते हैं ? सारणी पर एक दृष्टि डालने से ज्ञात होगा कि रजनी, सुधा, राजन, मधु और उर्मिल में से प्रत्येक के प्राप्तांक 56 थे। दूसरे शब्दों में, 56 अंक 5 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए थे। इसी प्रकार, 61 अंक 2 विद्यार्थियों द्वारा, 70 अंक 2 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए थे, इत्यादि। कभी कभी यह जानना रुचिपूर्ण होता है कि कौन सा प्रेक्षण कितनी बार आया। **एक विशेष प्रेक्षण जितनी बार आता है, वह उसकी बारंबारता (frequency) कहलाती है।** यह जानने के पश्चात कि 56 अंक 5 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए

गए थे, हम कहते हैं कि 56 की बारंबारता 5 है। इसी प्रकार, 61 और 70 में से प्रत्येक की बारंबारता 2 है, इत्यादि। यदि हम सभी प्रेक्षणों के लिए ऐसा करें और सारणी 13.1 में दिए गए आँकड़ों को न्यूनतम प्रेक्षण से आरम्भ करके अधिकतम प्रेक्षण तक (अथवा अधिकतम प्रेक्षण से न्यूनतम प्रेक्षण तक) पुनः व्यवस्थित करें तो जो हमें प्राप्त होगा उसे हम 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का **बारंबारता बंटन (frequency distribution) कहते हैं**। एक ऐसी सारणी जिसमें इस प्रकार का बंटन दिया हुआ हो, **बारंबारता बंटन सारणी (frequency distribution table)** अथवा केवल **बारंबारता सारणी (frequency table)** कहलाती है। इस प्रकार हमें 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों की निम्नलिखित **बारंबारता बंटन सारणी** प्राप्त होती है :

सारणी 14.1 : गणित में 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का बारंबारता बंटन

प्राप्तांक	बारंबारता
28	1
31	1
33	1
36	1
45	1
56	5
59	1
61	2
64	2
70	2
74	1
76	1
88	1
	20

क्या आप देखते हैं कि सारणी 13.1 की तुलना में सारणी 14.1 अधिक अर्थपूर्ण है ? ऐसा इसलिए है क्योंकि यह एक तीव्र दृष्टि में ही आंकड़ों की कुछ

महत्वपूर्ण विशेषताओं को दर्शा देती है। उदाहरणार्थ, यह तुरंत दर्शा देती है कि 56 अंक 5 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए हैं।

14.2 मिलान चिन्हों का प्रयोग

उपरोक्त उदाहरण में, प्रेक्षणों की संख्या केवल 20 थी। अत: दिए गए यथा प्राप्त आँकड़ों से बारंबारताओं को गिनना तथा ज्ञात करना सरल था। परन्तु जब प्रेक्षणों की संख्या अत्यधिक हो तो सरल गणना से बारंबारताओं को ज्ञात करना सरल नहीं होगा। ऐसी स्थितियों में हम **मिलान चिन्हों (tally marks)** का प्रयोग करते हैं जो बारंबारताओं को ज्ञात करने में बहुत सहायक होते हैं। गणना की सुगमता के लिए मिलान चिन्हों को प्राय: पाँच-पाँच के समूहों में अंकित किया जाता है। प्राय: पाँचवें मिलान चिन्ह को पहले चार को तिरछा काटता हुआ अंकित किया जाता है। मिलान चिन्हों को अंकित करने की विधि को निम्नलिखित उदाहरण में दर्शाया गया है :

उदाहरण : एक पासा 50 बार उछाला गया और निम्नलिखित अंक प्राप्त हुए :

2, 4, 5, 4, 5, 3, 2, 4, 5, 4,

3, 4, 3, 5, 6, 1, 1, 3, 4, 5,

6, 4, 3, 3, 2, 2, 4, 4, 5, 6,

4, 3, 3, 2, 2, 4, 4, 5, 5, 6,

6, 6, 5, 5, 4, 3, 4, 4, 3, 1

हल : हम शीर्षकों सहित तीन स्तम्भों की एक सारणी बनाते हैं जैसा कि सारणी 14.2 में दिखाया गया है। पहले स्तम्भ में हम 1 से 6 तक अंक लिखते हैं। अब हम दिए हुए आँकड़ों को देखते हैं। पहला प्रेक्षण 2 है। अत: सारणी में 2 के सम्मुख हम एक मिलान चिन्ह अंकित करते हैं। दूसरा प्रेक्षण 4 है। अत: हम 4 के सम्मुख एक मिलान चिन्ह अंकित करते हैं, इत्यादि, इत्यादि। जब सभी प्रेक्षण समाप्त हो जाएँ तो हम प्रत्येक अंक के सम्मुख अंकित मिलान चिन्हों को गिनते हैं और इस संख्या को बारंबारता वाले स्तम्भ में लिख लेते हैं। इस प्रकार हमें सारणी 14.2 प्राप्त हो जाती है।

सारणी 14.2 : एक पासे को 50 बार उछालने के प्राप्तांकों का बारंबारता बंटन

अंक	मिलान चिन्ह	बारंबारता
1	///	3
2	~~////~~ /	6
3	~~////~~ ~~////~~	10
4	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	15
5	~~////~~ ~~////~~	10
6	~~////~~ /	6
		50

यदि हम सारणियों 14.1 और 14.2 में सभी बारंबारताओं को जोड़ें तो हम क्या देखते हैं ? स्पष्ट है कि उनका योग क्रमशः 20 और 50 है जो कि प्रत्येक अवस्था में कुल प्रेक्षणों की संख्या के बराबर है। इस प्रकार, **सभी बारंबारताओं का योग प्रेक्षणों की संख्या के समान होता है।**

14.3 बारंबारता बंटन का माध्य

अब हम यह सीखेंगे कि जब आँकड़े एक बारंबारता बंटन के रूप में दिए गए हों तो उनका माध्य किस प्रकार ज्ञात किया जाता है। आइए, बारंबारता सारणी 14.1 पर पुनः विचार करें। माध्य हम निम्नलिखित चरणों में ज्ञात करते हैं:

चरण 1 : हम प्रत्येक प्रेक्षण (X) का उसकी बारंबारता (f) से गुणा करते हैं।

चरण 2 : हम चरण 1 में प्राप्त किए गए गुणनफलों ($f \times X$) का योग ज्ञात करते हैं।

चरण 3 : हम सभी बारंबारताओं (f) का योग ज्ञात करते हैं।

चरण 4 : हम चरण 2 में प्राप्त किए गए योग को चरण 3 में प्राप्त किए गए योग से भाग देते हैं और वाँछित माध्य प्राप्त करते हैं।

यह प्रक्रिया नीचे दिए अनुसार एक सारणी के रूप में दर्शाई जा सकती है

प्राप्तांक (X)	बारंबारता (f)	बारंबारता × प्राप्तांक (f × X)
28	1	28
31	1	31
33	1	33
36	1	36
45	1	45
56	5	280
59	1	59
61	2	122
64	2	128
70	2	140
74	1	74
76	1	76
88	1	88
	20	1140

इस प्रकार, माध्य $= \frac{1140}{20} = 57$ अंक

टिप्पणी: पाठक ध्यान दें कि माध्य वही है जैसा कि हमने अनुच्छेद 13.2 में प्राप्त किया था।

14.4 यथा प्राप्त आँकड़ों का बहुलक

हमारी यह जानने में भी रुचि हो सकती है कि कौनसा प्रेक्षण सबसे अधिक वार आता है। उदाहरणार्थ, सारणी 13.1 में 56 अधिकतम बार, अर्थात् 5 वार आता है। हम कहते हैं कि 56 उस सारणी में दिए गए आँकड़ों का बहुलक (mode) है। **आँकड़ों के एक समूह में वह प्रेक्षण जो अधिकतम बार आता है अथवा दूसरे शब्दों में जिसकी बारंबारता अधिकतम है, बहुलक**

कहलाता है। यह एक अन्य प्रकार का औसत है जो कभी कभी बहुत उपयोगी होता है।

यह हो सकता है कि आँकड़ों के एक समूह में दो या दो से अधिक प्रेक्षणों की बारंबारता एक साथ अधिकतम हो। ऐसी स्थितियों में बहुलक का अध्ययन हम अगली कक्षाओं में करेंगे।

उदाहरण : एक कक्षा की 30 लड़कियों की ऊँचाइयां (सें० मी० में) निम्नलिखित हैं :

140, 140, 160, 139, 153, 153, 146, 150, 148, 150,
152, 154, 146, 160, 150, 148, 148, 150, 148, 140,
138, 153, 152, 150, 148, 138, 140, 152, 148, 146

उपरोक्त आँकड़ों के लिए बारंबारता बंटन सारणी बनाइए। माध्य तथा बहुलक भी ज्ञात कीजिए।

हल : हमें निम्नलिखित बारंबारता सारणी प्राप्त होती है :

सारणी 14.3 : 30 लड़कियों की ऊँचाइयों का बारंबारता बंटन

ऊँचाई (सें० मी० में)	मिलान चिन्ह	बारंबारता	ऊँचाई × बारंबारता
138	//	2	$138 \times 2 = 276$
139	/	1	$139 \times 1 = 139$
140	////	4	$140 \times 4 = 560$
146	///	3	$146 \times 3 = 438$
148	~~////~~ /	6	$148 \times 6 = 888$
150	~~////~~	5	$150 \times 5 = 750$
152	///	3	$152 \times 3 = 456$
153	///	3	$153 \times 3 = 459$
154	/	1	$154 \times 1 = 154$
160	//	2	$160 \times 2 = 320$
		30	4440

माध्य ज्ञात करने के लिए हम सारणी में एक और स्तम्भ जोड़ते हैं जिसमें ऊँचाइयों तथा तदनुरूपी बारंबारताओं के गुणनफल दिए होते हैं जैसा कि पीछे दिखाया गया है । इस स्तम्भ का योग 4440 है ।

$$\text{अतः, माध्य} = \frac{4440}{30}$$

$$= 148$$

इस प्रकार, माध्य ऊँचाई 148 सें० मी० है ।

अब, बहुलक क्या है ? स्पष्ट है कि अधिकतम बारंबारता 6 है जो कि 148 सें० मी० ऊँचाई के सम्मुख है । अतः, बहुलक 148 सें० मी० है ।

ध्यान दीजिए कि यहाँ माध्य और बहुलक बराबर हैं । परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि ये सदा समान हों । अनुच्छेद 14.3 की सारणी देखिए । क्या बहुलक माध्य के बराबर है ? नहीं ।

14.5 आँकड़ों का वर्गीकरण

अब तक हमने सीखा है कि आँकड़ों को बारंबारताओं के पदों में किस प्रकार व्यवस्थित किया जाता है । इसे यथा प्राप्त आँकड़ों का अवर्गीकृत (ungrouped) बारंबारता बंटन कहा जाता है । प्राप्तांकों के हमारे उदाहरण में हमारे पास केवल 20 विद्यार्थियों के आँकड़े थे । यदि भिन्न प्रेक्षणों की संख्या अत्यधिक हो तो कभी कभी दिए गए आँकड़ों को बहुत से वर्गों में संघनित (condense) करके विभिन्न वर्गों में आने वाले प्रेक्षणों का बारंबारता बंटन प्राप्त करना आवश्यक होता है । जब आँकड़ों को इस रूप में लिखा जाए तो ये **वर्गीकृत (grouped) आँकड़े** कहलाते हैं तथा इस प्रकार प्राप्त बंटन को **वर्गीकृत बारंबारता बंटन (grouped frequency distribution)** कहा जाता है। आइए देखें कि 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों के उदाहरण के लिए हम किस प्रकार ऐसा करते हैं (देखिए सारणी 14.1) । हम एक ऐसा बारंबारता बंटन आगे दर्शाए अनुसार प्राप्त कर सकते हैं :

सारणी 14.4 : 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल (100 में से प्राप्तांक)	मिलान चिन्ह	बारंबारता
20—30	/	1
30—40	///	3
40—50	/	1
50—60	~~////~~ /	6
60—70	////	4
70—80	////	4
80—90	/	1
		20

उपरोक्त सारणी में हमने दिए हुए 20 प्रेक्षणों को 20—30, 30—40 40—50, इत्यादि 7 समूहों में संघनित कर दिया है। इनमें से प्रत्येक समूह एक **वर्ग अंतराल (class interval)** अथवा केवल **वर्ग (class)** कहलाता है।

हमारे वर्गों 20—30, 30—40, इत्यादि से यह दिखाई देता है कि प्रेक्षण 30 पहले और दूसरे दोनों वर्गों में सम्मिलित है। इसी प्रकार, प्रेक्षणों 40, 50,... 80 के विषय में भी हम यही सोच सकते हैं। परन्तु ऐसा हो नहीं सकता, क्योंकि कोई भी प्रेक्षण एक साथ दो वर्गों में सम्मिलित नहीं हो सकता। इस कठिनाई को दूर करने के लिए हम यह परिपाटी अपनाते हैं कि उभयनिष्ठ संख्या 30 दूसरे वर्ग में सम्मिलित है, 40 तीसरे वर्ग में सम्मिलित है, इत्यादि, इत्यादि। उदाहरणार्थ, वर्ग 40—50 में वे सभी प्रेक्षण सम्मिलित हैं जो 40 के समान हैं अथवा 40 से बड़े हैं परन्तु 50 से छोटे हैं। स्वयं 50 वर्ग 50—60 में सम्मिलित है। पहले अंतराल 20—30 में 20 **निम्न वर्ग सीमा (lower class boundary)** जबकि 30 **उपरि वर्ग सीमा (upper class boundary)** कहलाती है। इसी प्रकार, दूसरे वर्ग 30—40 में 30 निम्न वर्ग सीमा है जबकि 40 उपरि वर्ग सीमा है, इत्यादि। ध्यान दीजिए कि उपरोक्त सारणी में किसी अंतराल की उपरि वर्ग सीमा वही है जो कि अगले अंतराल की निम्न वर्ग सीमा है। किसी वर्ग की उपरि वर्ग सीमा और निम्न

वर्ग सीमा का अंतर उस वर्ग का **साइज़** (अथवा **चौड़ाई**) कहलाता है। उपरोक्त उदाहरण में प्रत्येक अंतराल का **वर्ग साइज़** (**class size**) 10 है। किसी वर्ग अंतराल की तदनुरूपी बारंबारता उसकी **वर्ग बारंबारता** (**class frequency**) कहलाती है।

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : निम्नलिखित बारंबारता बंटन सारणी को पढ़िए और अंत में दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

सारणी 14.5 : एक कारखाने के 600 कर्मचारियों की आय का बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल (रुपयों में मासिक आय)	**बारंबारता**
100—125	45
125—150	25
150—175	55
175—200	50
200—225	125
225—250	140
250—275	55
275—300	35
300—325	50
325—350	20
	600

(i) वर्ग अंतरालों का साइज़ क्या है ?

(ii) दूसरे वर्ग अंतराल की निम्न सीमा क्या है ?

(iii) सातवें वर्ग अंतराल की उपरि सीमा क्या है ?

(iv) किस वर्ग की बारंबारता अधिकतम है ?

हल : (i) वर्ग अंतरालों का साइज 25 है ।

(ii) दूसरे वर्ग अंतराल की निम्न सीमा 125 है ।

(iii) सातवें वर्ग अंतराल की उपरि सीमा 275 है ।

(iv) वर्ग 225—250 की बारंबारता अधिकतम है ।

टिप्पणी : एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन में वह वर्ग जिसकी बारंबारता अधिकतम हो, **बहुलक वर्ग (modal class)** कहलाता है ।

उदाहरण 2 : 65—80, 80—95, इत्यादि वर्ग अंतरालों का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित संख्याओं के लिए एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए :

120, 131, 158, 99, 101, 105, 107, 117, 135, 142, 145, 149, 137, 153, 155, 160, 100, 99, 88, 85, 67, 65, 158, 167, 184, 98, 101, 113, 93, 90, 69, 73, 105, 111, 104

हल : हमें निम्नलिखित बारंबारता सारणी प्राप्त होती है :

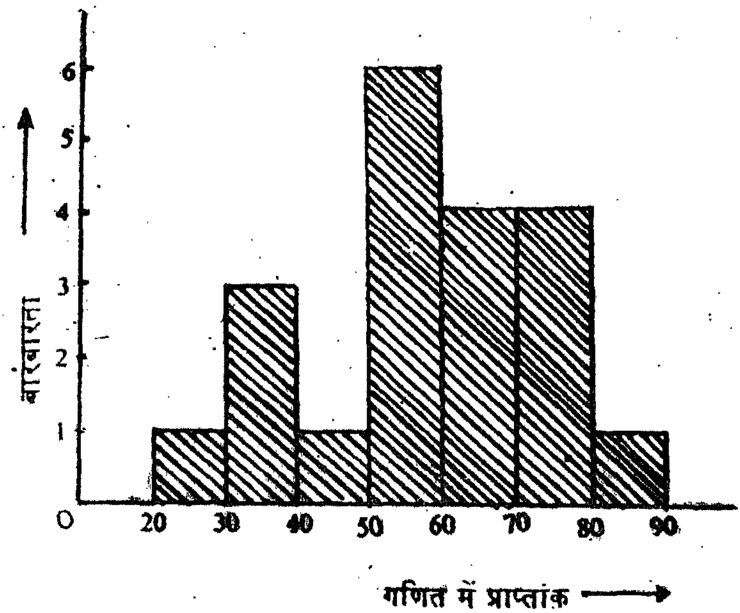
सारणी 14.6 : 35 संख्याओं का बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल	मिलान चिन्ह	बारंबारता
65-80	////	4
80-95	////	4
95-110	~~////~~ ~~////~~	10
110-125	////	4
125-140	///	3
140-155	////	4
155-170	~~////~~	5
170-185	/	1
		35

14.6 बारंबारता बंटनों का आलेखीय निरूपण—आयतचित्र

पिछली कक्षाओं में हम पढ़ चुके हैं कि दंड चार्टों, इत्यादि द्वारा किसी दी हुई सूचना को किस प्रकार निरूपित किया जाता है। अब हम सीखेंगे कि वर्गीकृत बारंबारता बंटन का आलेखीय निरूपण किस प्रकार किया जाता है।

ऐसा बहुत सी विधियों से किया जा सकता है। प्राय: प्रयोग की जाने वाली आलेखीय विधियों में से आयतचित्र (**histogram**) एक है। यह एक ऊर्ध्वाधर दंड आलेख होता है जिसमें विभिन्न दंडों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं होता। एक आयतचित्र बनाने के लिए हम दो ऐसे अक्ष खींचते हैं जो एक दूसरे पर लम्ब हों। हम वर्गीकृत आँकड़ों की वर्ग सीमाओं को क्षैतिज अक्ष (horizontal axis) पर तथा तदनुरूपी वर्ग बारंबारताओं को ऊर्ध्वाधर अक्ष (vertical axis) पर अंकित करते हैं। ऐसा करते समय हम अक्ष पर उपयुक्त पैमाने (scale) का प्रयोग करते हैं। फिर हम आयतों की रचना करते हैं जिनमें तदनुरूपी वर्ग अंतराल आयतों के आधार तथा तदनुरूपी वर्ग बारंबारताएँ उनकी ऊँचाइयाँ होती हैं।



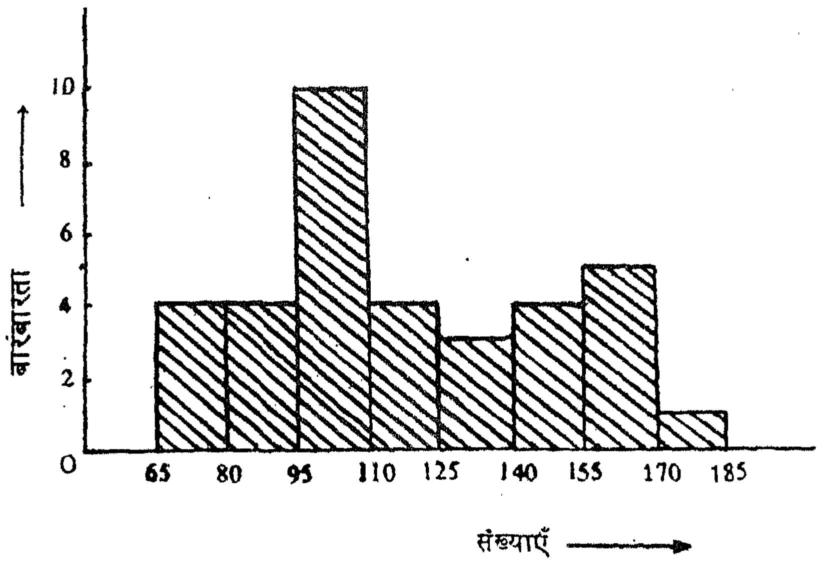
आकृति 14.1 : सारणी 14.4 के आँकड़ों के लिए आयतचित्र

आकृति 14.1 सारणी 14.4 में दिए गए 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों के बारंबारता बंटन के लिए आयतचित्र दर्शाती है।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : सारणी 14.6 में दिए आँकड़ों के लिए एक आयतचित्र बनाइए।

हल : यह आयतचित्र आकृति 14.2 में दिखाया गया है।



आकृति 14.2 : सारणी 14.6 के आँकड़ों के लिए आयतचित्र

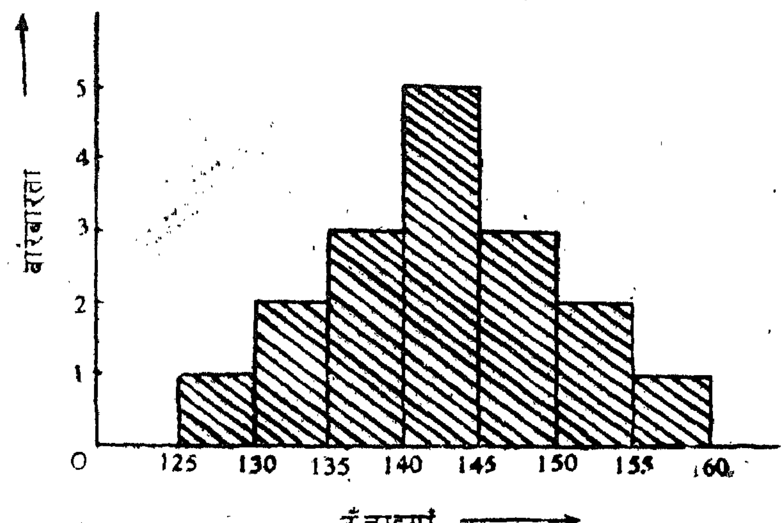
उदाहरण 2 : प्रश्नावली 13.1 के प्रश्न 3 में दिए गए आँकड़ों को वर्ग अंतरालों 125-130, 130-135, इत्यादि वाले बारंबारता बंटन में वर्गीकृत कीजिए। इस बारंबारता बंटन को एक आयतचित्र द्वारा निरूपित कीजिए।

हल : हम निम्नलिखित बारंबारता बंटन प्राप्त करते हैं :

सारणी 14.7 : 17 लड़कियों की ऊँचाइयों का बारंबारता बंटन

ऊँचाई (सें० मी० में)	मिलान चिन्ह	बारंबारता
125-130	/	1
130-135	//	2
135-140	///	3
140-145	~~////~~	5
145-150	///	3
150-155	//	2
155-160	/	1
		17

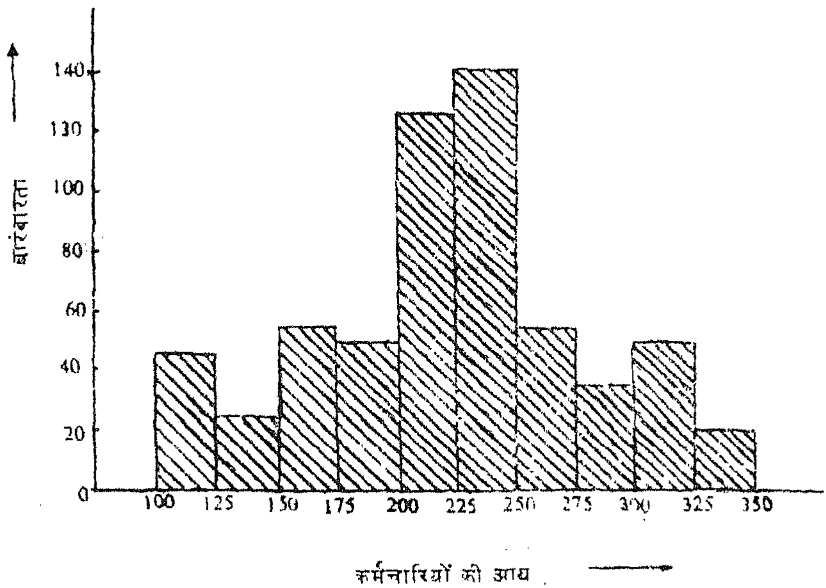
आयतचित्र आकृति 14.3 में दिखाया गया है।



आकृति 14.3 : सारणी 14.7 के आँकड़ों के लिए आयतचित्र

उदाहरण 3 : सारणी 14.5 में दिए गए आँकड़ों के लिए एक आयतचित्र बनाइए।

हल : आयतचित्र आकृति 14.4 में दिया गया है।



आकृति 14.4 : सारणी 14.5 के आँकडों के लिए आयतचित्र

प्रश्नावली 14.1

1. अनुच्छेद 13.2 के उदाहरण 1 में दिए गए आँकड़ों के लिए (18 अध्यापकों की आयु) एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए। 20—25, 25—30, इत्यादि सात वर्ग लीजिए। इनका एक आयतचित्र बनाइए।

2. एक कक्षा के 25 लड़कों के भार (कि॰ ग्रा॰ में) नीचे दिए हैं :

49.2, 48.4, 46, 47.5, 47.5, 50, 52.1, 52.5, 54, 43, 42.7, 41.2, 43.1, 55.2, 56, 48, 47.1, 40.9, 40.2, 49, 51, 51.3, 56.4, 46.2, 45

(i) आँकड़ों को 6 वर्गों 40—43, 43—46, इत्यादि में वर्गीकृत कीजिए।

(ii) एक आयतचित्र खींचिए।

3. एक शारीरिक परीक्षा में बैठने वाले 32 पुरुषों की ऊँचाइयाँ (सें॰ मी॰में) नीचे दी गई हैं :

162, 160, 167, 173, 170, 170, 162, 152, 159, 160, 157, 159, 151, 159, 164, 165, 166, 165, 164, 169, 172, 150, 159, 165, 165, 166, 170, 179, 165, 167, 165, 165

(i) पहले वर्ग की निम्न सीमा 150 लेते हुए साइज़ 5 के वर्ग अंतरालों वाला एक बारंबारता बंटन बनाइए।

(ii) बहुलक वर्ग कौन सा है ?

(iii) एक आयतचित्र खींचिए।

4. एक पद के लिए 40 प्रत्याशियों के एक समूह की एक परीक्षा ली गई। प्रत्याशियों ने निम्नलिखित समय में (मिनटों में) परीक्षा पूरी की :

36, 31, 42, 26, 27, 44, 30, 42, 40, 26, 28, 49, 47, 46, 36, 37, 42, 40, 41, 32, 30, 49, 48, 33, 34, 35, 45, 44, 40, 42, 48, 27, 35, 41, 28, 30, 32, 42, 48, 39

(i) 5 वर्ग अंतरालों 25—30, 30—35, इत्यादि को लेकर इन आँकड़ों के लिए एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी बनाए।

(ii) आँकड़ों को एक आयतचित्र द्वारा निरूपित कीजिए।

5. 50 विद्यार्थियों के गणित में प्राप्तांकों का बारंबारता बंटन आगे दिया गया है :

सारणी 14.8 : गणित में 50 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल (100 में से प्राप्तांक)	बारंबारता
10—20	1
20—30	2
30—40	4
40—50	7
50—60	15
60—70	9
70—80	7
80—90	3
90—100	2
	50

(i) बहुलक वर्ग कौन सा है ?

(ii) एक आयतचित्र खींचिए।

6. एक कम्पनी के 200 कर्मचारियों की मासिक आय (रुपयों में) निम्नलिखित सारणी में दी गई है :

सारणी 14.9 : 200 कर्मचारियों की आय का बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल (रुपयों में मासिक आय)	बारंबारता
200—300	50
300—400	42
400—500	32
500—600	25
600—700	18
700—800	15
800—900	12
900—1000	6
	200

उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक आयतचित्र खींचिए।

7. दिल्ली में नवम्बर 1978 के 30 दिनों के लिए अधिकतम दैनिक तापमान (°C में) नीचे दिया है :

30.7, 30.9, 31.1, 32.0, 33.5, 33.0, 30.7, 30.0,
27.1, 27.6, 26.6, 24.5, 27.5, 28.1, 27.6, 28.4,
29.0, 28.9, 28.3, 29.3, 32.4, 29.5, 25.7, 26.3,
24.2, 23.4, 22.4, 22.5, 23.3, 22.8

22.0—23.5, 23.5—25.0, इत्यादि वर्ग अंतराल लेते हुए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए। एक आयतचित्र भी खींचिए।

कक्षा में क्रिया-कलाप हेतु सुझाव

8. निम्नलिखित सारणी बनाइए। दो सिक्के लीजिए और उन्हें एक साथ 25 बार उछालिए। प्रत्येक बार आने वाले चित (heads) की संख्या देखिए, सारणी में मिलान चिन्ह लगाइए और इसे पूरा कीजिए।

सारणी 14.10 : दो सिक्कों को 25 बार उछालने में प्राप्त चित की संख्या का बारंबारता बंटन

चित की संख्या	मिलान चिन्ह	बारंबारता
0		
1		
2		—
		25

9. निम्नलिखित सारणी बनाइए। एक पासे को 30 बार उछालिए, मिलान चिन्ह अंकित कीजिए और सारणी को पूरा कीजिए।

सारणी 14.11 : एक पासे को 30 बार उछालने में प्राप्तांकों का बारंबारता बंटन

प्राप्तांक	मिलान चिन्ह	बारंबारता
1		
2		
3		
4		
5		
6		
		30

10. निम्नलिखित सारणी बनाइए। अपनी कक्षा के विद्यार्थियों से (स्वयं को मिलाकर) एक एक कर के उनके जन्म के महीने ज्ञात कीजिए। प्रत्येक महीने में उत्पन्न विद्यार्थियों की संख्या की गणना करने के लिए मिलान चिन्हों का प्रयोग कीजिए और सारणी को पूरा कीजिए।

सारणी 14.12 : जन्म के महीनों के अनुसार एक कक्षा के विद्यार्थियों का बारंबारता बंटन

जन्म का महीना	मिलान चिन्ह	बारंबारता
जनवरी		
फरवरी		
मार्च		
अप्रैल		
मई		
जून		
जुलाई		
अगस्त		
सितम्बर		
अक्तूबर		
नवम्बर		
दिसम्बर		

मुख्य संकल्पनाएँ

बारंबारता	वर्गीकृत बारंबारता बंटन
बारंबारता बंटन	वर्ग अंतराल
बारंबारता सारणी	वर्ग साइज़
अवर्गीकृत बारंबारता बंटन का माध्य	निम्न वर्ग सीमा
बहुलक	उपरि वर्ग सीमा
बहुलक वर्ग	आयतचित्र

एकक XV

दैनिक जीवन में गणित

इस एकक में, हम पिछली कक्षाओं में पढ़े गए अंकगणित के कुछ विषयों जैसे कि लाभ और हानि, साधारण ब्याज, समय और काम, समय और दूरी, अनुक्रमानुपात और व्युत्क्रमानुपात का पुनरावलोकन करेंगे तथा इनका अध्ययन पहले से कुछ उच्चतर स्तर पर करेंगे। हम प्रारम्भिक स्तर पर चक्रवृद्धि ब्याज का परिचय भी देंगे।

15.1 पुनरावलोकन

आपको निम्नलिखित संकल्पनाओं, जिनसे आप पहले ही परिचित हैं, का पुनरावलोकन करना चाहिए :

लाभ, हानि, क्रय मूल्य, विक्रय मूल्य, साधारण ब्याज, मूलधन, मिश्रधन।

अनुक्रमानुपात, व्युत्क्रमानुपात, आनुपातिकता स्थिरांक।

समय और काम, समय और दूरी, इकाई की विधि।

उपरोक्त संकल्पनाओं का पर्यवेक्षण करने के लिए हम उच्चतर स्तर पर कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : आनन्द को एक वस्तु बिहारी को बेचने में 10% की हानि हुई। बिहारी ने वही वस्तु चंदू को 990 रु० में बेची और उसे 10% का लाभ हुआ। चंदू दिनेश को वह वस्तु कितने में बेचे कि उसे 10% का लाभ हो? निम्नलिखित भी ज्ञात कीजिए :

(i) चंदू का कुल लाभ

(ii) बिहारी का कुल लाभ

(iii) आनन्द की कुल हानि

हल : चंदू का क्रय मूल = 990 रु०

उसका लाभ = 10%

अतः, चंदू का विक्रय मूल्य $= 990 \times \frac{110}{100}$ रु०

= 1089 रु०

दूसरे शब्दों में, चंदू को वह वस्तु 1089 रु० में दिनेश को बेचनी चाहिए।

अब, (i) चंदू का कुल लाभ = उसका विक्रय मूल्य — उसका क्रय मूल्य

= 1089 रु० — 990 रु०

= 99 रु०

(ii) बिहारी का विक्रय मूल्य = 990 रु०

उसका लाभ = 10%

अतः, बिहारी का क्रय मूल्य $= \left(990 \times \frac{100}{110}\right)$ रु०

= 900 रु०

इस प्रकार, उसका कुल लाभ = 990 रु० — 900 रु०

= 90 रु०

(iii) आनन्द का विक्रय मूल्य = 900 रु०

उसकी हानि = 10%

अतः, आनन्द का क्रय मूल्य $= \left(900 \times \frac{100}{90}\right)$ रु०

= 1000 रु०

इस प्रकार, उसकी कुल हानि = 1000 रु० — 900 रु०

= 100 रु०

उदाहरण 2 : एक किसान ने दो बैल 480 रु० प्रति बैल के हिसाब से बेचे। एक बैल पर उसे 20% का लाभ हुआ और दूसरे पर उसे 20% की हानि हुई। उसका कुल लाभ अथवा हानि ज्ञात कीजिए।

हल : पहले बैल का विक्रय मूल्य = 480 रु०

लाभ = 20%

अतः, इसका क्रय मूल्य $= (480 \times \frac{100}{120})$ रु०

$= 400$ रु०

दूसरे बैल का बिक्रय मूल्य $= 480$ रु०

हानि $= 20\%$

अतः, इसका क्रय मूल्य $= (480 \times \frac{100}{80})$ रु०

$= 600$ रु०

अब, दोनों बैलों का क्रय मूल्य $= (400 + 600)$ रु०

$= 1000$ रु०

दोनों बैलों का विक्रय मूल्य $= 480 \times 2$ रु०

$= 960$ रु०

क्योंकि क्रय मूल्य बिक्रय मूल्य से अधिक है, अतः

कुल हानि = क्रय मूल्य — विक्रय मूल्य

$= (1000 - 960)$ रु०

$= 40$ रु०

उदाहरण 3 : दो समान राशियाँ तीन वर्ष के लिए क्रमशः 5% और 7% वार्षिक दर से साधारण ब्याज पर उधार ली गई। 3 वर्ष के अंत में उनके ब्याजों का अंतर 30 रु० था। उधार ली गई राशियाँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि उधार ली गई समान राशियों में से प्रत्येक 100 रु० थी।

तब 5% वार्षिक दर से 3 वर्ष का ब्याज

$= 100 \times \frac{5}{100} \times 3$ रु०

$= 15$ रु०

तथा 7% वार्षिक दर से 3 वर्ष का ब्याज

$= 100 \times \frac{7}{100} \times 3$ रु०

$= 21$ रु०

ब्याज में अंतर $= 21$ रु० $- 15$ रु०

$= 6$ रु०

यदि ब्याज का अंतर 6 रु० है, तो उधार ली गई प्रत्येक राशि $= 100$ रु०

यदि ब्याज का अंतर 1 रु० हो, तो उधार ली गई प्रत्येक राशि $= \frac{100}{6}$ रु०

अतः यदि ब्याज का अंतर 30 रु० है, तो उधार ली गई प्रत्येक राशि

$$= \frac{100}{6} \times 30 \text{ रु०}$$

$$= 500 \text{ रु०}$$

उदाहरण 4 : यदि मैं कोई राशि एक कम्पनी में जमा कराता हूँ तो 7 वर्ष में यह दुगुनी हो जाती है। यदि मैं वही राशि एक दूसरी कम्पनी में जमा कराता हूँ तो यह 15 वर्ष में तिगुनी हो जाती है। यदि दोनों में साधारण ब्याज ही मिलता है तो किस कम्पनी में जमा कराना अधिक लाभप्रद है ?

हल : मान लीजिए कि प्रत्येक कम्पनी में 100 रु० की राशि जमा कराई जाती है।

पहली कम्पनी में जमा कराई गई राशि के लिए,

$$p = 100 \text{ रु०}$$
$$I = 200 \text{ रु०} - 100 \text{ रु०} = 100 \text{ रु०}$$
$$t = 7 \text{ वर्ष}$$

यदि ब्याज की वार्षिक दर $r\%$ है, तो

$$r = \frac{100 \times 100}{100 \times 7}$$

$$= 14\frac{2}{7}$$

दूसरी कम्पनी में जमा कराई गई राशि के लिए,

$$p = 100 \text{ रु०}$$
$$I = 200 \text{ रु० (क्यों ?)}$$
$$t = 15 \text{ वर्ष}$$

$$\text{अतः, } r = \frac{100 \times 200}{100 \times 15}$$

$$= 13\frac{1}{3}$$

इस प्रकार, पहली कम्पनी में राशि जमा कराना अधिक लाभप्रद है।

उदाहरण 5 : यदि कृष्ण 6 घंटे प्रतिदिन कार्य करे तो वह एक काम को 8 दिन में समाप्त कर सकता है। यदि दीपक 10 घंटे प्रतिदिन कार्य करे तो वह भी उसी काम को 8 दिन में समाप्त कर सकता है। यदि दोनों 6 घंटे प्रतिदिन कार्य करें, तो उन्हें काम समाप्त करने में कितना समय लगेगा ?

हल : स्पष्ट है कि 6 घंटे प्रतिदिन कार्य करने पर कृष्ण का एक दिन का

$$\text{काम} = \frac{1}{8}$$

अब, 10 घंटे प्रतिदिन कार्य करके दीपक का एक दिन का काम $\frac{1}{8}$ है।

क्योंकि दोनों प्रतिदिन 6 घंटे कार्य करते हैं, अतः हमें 6 घंटे प्रतिदिन कार्य करने पर दीपक का एक दिन का काम ज्ञात करना चाहिए।

यदि दीपक 10 घंटे प्रतिदिन कार्य करे, तो उसका एक दिन का काम $= \frac{1}{8}$

यदि वह 1 घंटा प्रतिदिन कार्य करे, तो उसका एक दिन का काम

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{10} \text{ (क्यों ?)}$$

और यदि वह 6 घंटे प्रतिदिन कार्य करे, तो उसका एक दिन का काम

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{10} \times 6$$

$$= \frac{3}{40}$$

अतः, 6 घंटे प्रतिदिन कार्य करके दोनों का एक दिन का काम

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{40}$$

$$= \frac{8}{40}$$

$$= \frac{1}{5}$$

इस प्रकार, यदि दोनों 6 घंटे प्रतिदिन कार्य करें तो वे उस काम को 5 दिन में समाप्त करेंगे ।

उदाहरण 6 : A और B एक दूसरे से 10 कि० मी० की दूरी पर खड़े हैं । A, 3 कि० मी० प्रति घंटा और B, 5 कि० मी० प्रति घंटा की चाल से चल सकता है । यदि वे प्रात : 9 बजे एक दूसरे की ओर चलना आरम्भ करें, तो वे परस्पर किस समय और कहाँ मिलेंगे ?

हल : मान लीजिए कि वे A से x कि०मी० की दूरी पर मिलते हैं । इसका अर्थ यह हुआ कि समान समय ही में A को x कि०मी० और B को (10—x) कि० मी० चलना पड़ता है । (क्यों ?)

3 कि० मी० चलने के लिए A, 1 घंटा लेता है

अत:, 1 कि० मी० चलने में वह $\frac{1}{3}$ घंटे लेगा

और x कि० मी० चलने में वह $\frac{1}{3} \times x$ घंटे लेगा

इसी प्रकार, 5 कि० मी० चलने में B, 1 घंटा लेता है

अत:, 1 कि० मी० चलने में वह $\frac{1}{5}$ घंटे लेगा

और (10—x) कि० मी० चलने में वह $\frac{(10-x)\times 1}{5}$ घंटे लेगा

चूंकि दोनों द्वारा लिया गया समय समान है, अत:

$$\frac{x}{3} = \frac{10-x}{5}$$

अथवा, $5x = 3(10-x) = 30-3x$

अर्थात्, $8x = 30$

अथवा, $x = \frac{30}{8} = 3\frac{3}{4}$

दूसरे शब्दों में, वे A से $3\frac{3}{4}$ कि०मी० की दूरी पर मिलेंगे । इस दूरी को तय करने में लिया गया समय $\frac{x}{3}$ अथवा $\frac{10-x}{5}$ घंटे, अर्थात् $\frac{15}{4\times 3} = \frac{5}{4}$ घंटे है।

क्योंकि उन्होंने प्रात: 9 बजे चलना आरम्भ किया था, अत: वे प्रात: 10.15 बजे मिलेंगे ।

उदाहरण 7 : y, z—x के व्युत्क्रमानुपाती है। जब z=11 और x=9 है, तब y=5 है। x ज्ञात कीजिए, जब y=2 और z=7 है।

हल : क्योंकि y, z—x के व्युत्क्रमानुपाती है, अतः

$$y\,(z-x)=k \qquad (1)$$

जहाँ k आनुपातिकता स्थिरांक है।

क्योंकि जब z=11 और x=9 है, तब y=5 है, अतः (1) में इन मानों को प्रतिस्थापित करके हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$5=\frac{k}{11-9}$$

अर्थात्, $k=10$

अब, k=10, y=2 और z=7 के साथ समीकरण(1) से निम्न प्राप्त होता है :

$$2=\frac{10}{7-x}$$

अथवा, $10=2(7-x)$

$=14-2x$

अर्थात्, $2x=4$

अथवा, $x=0$

उदाहरण 8 : x, y+z के अनुक्रमानुपाती है। जब y=3 और z=4 है, तब x=3 है। z ज्ञात कीजिए, जब x=3 और y=5 है।

हल : क्योंकि x, y+z के अनुक्रमानुपाती है, अत :

$$x=k(y+z) \qquad (1)$$

जहाँ k आनुपातिकता स्थिरांक है।

क्योंकि x=3, जब y=3 और z=4 है, अतः (1) में इन मानों को प्रतिस्थापित करके हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$3=k\,(3+4)$$

अर्थात् $k=\frac{3}{7}$

अब, $k=\frac{3}{7}$, $x=3$ और $y=5$ के साथ समीकरण (1) से हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$3=\frac{3}{7}(5+z)$$

अथवा, $21=15+3z$

अर्थात्, $3z=6$

अथवा, $z=2$

प्रश्नावली 15.1

(लाभ और हानि पर)

1. एक दुकानदार ने 2 रु० प्रति कलम के हिसाब से कुछ कलम खरीदे और 2.50 रु० प्रति कलम के हिसाब से बेच दिए। उसका प्रतिशत लाभ ज्ञात कीजिए।
2. एक व्यापारी ने 2.50 रु० प्रति बल्ब के हिसाब से 250 बल्ब खरीदे। परन्तु खराब हो जाने के कारण उसे 12 बल्ब फेंक देने पड़े। उसने शेष बल्बों को 3 रु० प्रति बल्ब के हिसाब से बेच दिया। उसका कुल लाभ ज्ञात कीजिए।
3. एक दुकानदार ने 50 रु० प्रति कम्बल की दर से 100 कम्बल खरीदे। उसने पाया कि 10 कम्बल कुछ खराब हैं जिन्हें उसे 30 रु० प्रति कम्बल के हिसाब से बेचना पड़ा। शेष कम्बलों को वह किस दर से बेचे कि पूरे सौदे पर उसे 14% लाभ हो ?
4. मोहन ने एक रेडियो 5% लाभ पर सोहन को बेचा। परन्तु सोहन को इसकी मरम्मत पर 45 रु० खर्च करने पड़े। कुछ समय पश्चात उसने उसे 465 रु० में हरि को बेच दिया। इस सौदे में उसे न तो लाभ हुआ और न ही हानि हुई। मोहन ने वह रेडियो कितने का खरीदा था ? उसका कुल लाभ क्या था ?
5. यदि हरि प्रकाश अपना प्लाट 22000 रु० में बेचे तो उसे 10% का लाभ होगा। उसे वह प्लाट कितने में बेचना चाहिए ताकि उसे 15% का लाभ हो ?

6. मैंने एक वस्तु अंकित मूल्य से 20% कम पर खरीदी और अंकित मूल्य पर बेच दी। मेरा प्रतिशत लाभ क्या था ?

7. एक वस्तु का विक्रय मूल्य उसके क्रय मूल्य का $\frac{4}{5}$-वाँ भाग है। प्रतिशत हानि ज्ञात कीजिए।

8. मैंने 1560 रु० प्रति घोड़े के हिसाब से दो घोड़े बेचे। एक पर मुझे 4% का लाभ हुआ और दूसरे पर 4% की हानि हुई। मुझे कुल मिलाकर इस सौदे में लाभ हुआ या हानि ? यह भी बताइए कितना लाभ या हानि हुई।

*9. एक फल विक्रेता ने 100 रु० में 500 संतरे खरीदे। उन्हें बेचने से उसका लाभ 100 संतरों के विक्रय मूल्य के समान था। उसे कितने प्रतिशत लाभ हुआ ?
[संकेत : उसने 500—100=400 संतरे 100 रु० में बेचे। इस दर पर 100 संतरों का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए। यही उसका लाभ है।]

10. राकेश और रोशन ने एक ही मूल्य पर एक एक भैंस खरीदी। राकेश ने उसे 744 रु० में बेचा और उसे 7% की हानि हुई। परन्तु रोशन अपनी भैंस पर 5% का लाभ कमाना चाहता है। उसे वह कितने में बेचनी चाहिए ?

प्रश्नावली 15.2

(साधारण ब्याज पर)

1. मुझे 5% वार्षिक साधारण ब्याज पर एक बैंक में 2000 रु० कितने समय के लिए जमा कराने चाहिए ताकि मुझे 3000 रु० वापिस मिलें ?

2. मुझे एक बैंक में कितनी राशि जमा करानी चाहिए कि मुझे 6% वार्षिक साधारण ब्याज पर दो वर्ष के पश्चात 5600 रु० वापिस मिलें ?

3. कृष्ण ने एक मित्र से 6% वार्षिक साधारण ब्याज पर 1000 रु० उधार लिए। 7 वर्ष के पश्चात उसने 700 रु० नकद और एक गाय मित्र को दी। गाय का मूल्य क्या था ?

4. अब्दुल ने 5000 रु० एक बैंक में जमा कराए। दो वर्ष के पश्चात उसने 2000 रु० निकाल लिए और जमा कराने की तिथि से 5 वर्ष पश्चात उसे बैंक से 3760 रु० प्राप्त हुए। साधारण ब्याज की वार्षिक दर ज्ञात कीजिए।

5. निम्न में से प्रत्येक में अज्ञात पद ज्ञात कीजिए :

(i) $p=400$ रु०, $I=?$, $r=6\%$, $t=2$ वर्ष

(ii) $p=?$, $I=200$ रु०, $r=5\%$, $t=4$ वर्ष

(iii) $p=750$ रु०, $I=101.25$ रु०, $r=?$, $t=3$ वर्ष

(iv) $p=1000$ रु०, $I=1000$ रु०, $r=8\%$, $t=?$

(v) $A=14940$ रु०, $p=?$, $r=3\frac{1}{2}\%$, $t=7$ वर्ष

6. मैंने एक मित्र से $5\frac{1}{2}\%$ वार्षिक साधारण ब्याज पर कुछ धन उधार लिया। 3 वर्ष के पश्चात मैंने उसे 524.25 रु० देकर हिसाब चुकता कर दिया। मैंने कितना धन उधार लिया था ?

7. उर्मिल ने साधारण ब्याज पर 1000 रु० एक बैंक में जमा किए। 1 वर्ष और 9 मास पश्चात उसने अपने खाते की पूरी रकम निकाल ली। यदि उसे 1087.50 रु० प्राप्त हुए हों, तो बैंक द्वारा दिए गए ब्याज की वार्षिक दर ज्ञात कीजिए।

8. सुरेश और राजीव में से प्रत्येक ने अपने मित्र से 600 रु० साधारण ब्याज पर एक ही ब्याज दर से उधार लिए। दो वर्ष के पश्चात सुरेश ने 672 रु० वापिस कर दिए। यदि राजीव 5 वर्ष के पश्चात अपना ऋण चुकाना चाहता है, तो उसे कितनी राशि लौटानी पड़ेगी ?

9. दो समान राशियाँ 8% वार्षिक साधारण ब्याज पर क्रमशः 2 वर्ष और 3 वर्ष के लिए उधार ली गई। दोनों के ब्याज का अंतर 56 रु० था। कौन-कौन सी राशियाँ उधर लाई गयीं ?

10. 500 रु० का ऋण साधारण ब्याज पर 10 वर्ष में दुगुना हो जाता है। उसी ब्याज दर पर यह राशि कितने वर्ष में तिगुनी हो जाएगी ?

11. यदि एक राशि 1 वर्ष के भीतर लौटा दी जाती है तो एक साहूकार 5% वार्षिक दर से साधारण ब्याज पर ऋण देता है। यदि राशि 2 वर्ष के भीतर लौटाई जाए तो 6% और यदि 3 वर्ष के भीतर लौटाई जाए 7% वार्षिक दर पर ऋण देता है। मैंने 750 रु० उधार लिए और $1\frac{1}{2}$ वर्ष के पश्चात ब्याज सहित लौटा दिए। मैंने कुल कितनी राशि लौटाई? यदि मैं एक वर्ष अधिक देर से राशि लौटाता, तो मुझे कुल कितनी रकम देनी पड़ती ?

प्रश्नावली 15.3

(समय और काम, समय और दूरी, इकाई की विधि पर)

1. A किसी काम को 10 दिन में समाप्त कर सकता है, जबकि A और B दोनों मिलकर उसी काम को 6 दिन में समाप्त कर सकते हैं। यदि B अकेला काम करे, तो वह कितने समय में उस काम को समाप्त करेगा ?

2. एक माँ और उसकी पुत्री दोनों मिलकर एक काम को 4 दिन में समाप्त कर सकती हैं। परन्तु यदि माँ अकेली काम करे तो वह उस काम को 6 दिन में समाप्त कर सकती है। दोनों मिलकर एक दिन काम करती हैं और फिर माँ को काम छोड़ कर जाना पड़ता है। शेष काम को समाप्त करने में पुत्री को कितना समय लगेगा ?

3. B, A से दुगुना काम कर सकता है। यदि A किसी काम को 6 दिन में कर सकता है, तो A और B दोनों मिलकर उसी काम को कितने समय में करेंगे ?

4. B, A से दुगुना काम कर सकता है और C, B से दुगुना काम कर सकता है। यदि A अकेला किसी काम 28 दिन में कर सकता है तो A,B और C तीनों मिलकर उसी काम को कितने समय में करेंगे ?

5. यदि राम 6 घंटे प्रतिदिन कार्य करे तो वह एक काम को 15 दिन में समाप्त कर सकता है। यदि रहीम 9 घंटे प्रतिदिन कार्य करे तो वह भी उसी काम को 15 दिन में कर सकता है। यदि दोनों 9 घंटे प्रतिदिन कार्य करके एक साथ काम करें, तो वे काम समाप्त करने में कितना समय लगाएँगे ?

6. एक साइकिल चालक 10 कि० मी० प्रति घंटा की समान चाल से स्थान A से चलकर स्थान B पर 2 घंटे 24 मिनट में पहुँच जाता है। यदि वह B से A तक की वापिसी यात्रा 3 घंटे में पूरी करता है, तो वापिसी यात्रा में उसकी चाल क्या थी ?

7. स्टेशन A और C एक दूसरे से 91 कि०मी०की दूरी पर हैं और A तथा C के बीच में A से 13 कि० मी० की दूरी पर B एक अन्य स्टेशन है। एक रेलगाड़ी प्रातः 7 बजे A से चलकर 12 मिनट में B पर पहुँच जाती है। यह मानते हुए कि रेलगाड़ी पूरे समय में समान चाल से चलती है, उसकी चाल और C पर पहुँचने का समय ज्ञात कीजिए।

8. एक घड़ी प्रतिदिन 15 मिनट आगे हो जाती है। 12 बजे दोपहर को उसका समय मिलाया जाता है। अगले दिन प्रातः 4 बजे घड़ी में क्या समय होगा ?

9. चार मजदूर एक खाई को 15 दिन में खोद सकते हैं। यदि यह काम 10 दिन में समाप्त किया जाना हो, तो कितने और मजदूरों की आवश्यकता होगी ?

10. एक स्काउट शिविर में 45 स्काउटों के लिए 12 दिन का भोजन है। यदि 9 स्काउट शिविर में सम्मिलित ही नहीं होते, तो वह भोजन कितने दिन तक चलेगा ?

11. 40 कि० मी० प्रति घंटा की चाल से चलती हुई एक बस 2 घंटे 10 मिनट में नगर A से नगर B में पहुँच जाती है। 65 कि० मी० प्रति

घंटा की चाल से चलती हुई एक कार उस दूरी को कितने समय में तय कर लेगी ?

प्रश्नावली 15.4

(अनुक्रमानुपात और व्युत्क्रमानुपात पर)

1. u, v के अनुक्रमानुपाती है और आनुपातिकता स्थिरांक $\frac{2}{5}$ है । निम्न ज्ञात कीजिए :

   (i) u, जब $v=10$ है ।

   (ii) v, जब $u=\frac{15}{2}$ है ।

2. x, y के व्युत्क्रमानुपाती है और आनुपातिकता स्थिरांक $\frac{3}{7}$ है । निम्न ज्ञात कीजिए :

   (i) x, जब $y=3$ है ।

   (ii) y, जब $x=6$ है ।

3. x, y के अनुक्रमानुपाती है और $x=4$ जब $y=\frac{12}{13}$ है ।

   (i) x ज्ञात कीजिए जब $y=\frac{4}{13}$ है ।

   (ii) y ज्ञात कीजिए जब $x=5$ है ।

4. w, $u+v$ के व्युत्क्रमानुपाती है और $w=3$ जब $u=4$ और $v=2$ है । u ज्ञात कीजिए जब $w=2$ और $v=4$ है ।

5. y, $x-z$ के अनुक्रमानुपाती है और $y=3$ जब $x=9$ और $z=2$ है । z ज्ञात कीजिए जब $x=14$ और $y=6$ है ।

6. u, $v-w$ के व्युत्क्रमानुपाती है और $u=5$ जब $w=11$ और $v=9$ है । w ज्ञात कीजिए जब $u=2$ और $v=7$ है ।

15.2 चक्रवृद्धि ब्याज

चक्रवृद्धि ब्याज की संकल्पना को समझने के लिए हम पहले साधारण ब्याज का एक उदाहरण लेते हैं। आइए मान लें कि 500 रु० की राशि 2 वर्ष के लिए 5% साधारण ब्याज पर उधार ली जाती है। इस राशि पर ब्याज क्या होगा ? हम जानते हैं कि

साधारण ब्याज $I = p\ r\ t$

जहाँ p मूलधन, r ब्याज की वार्षिक दर और t वर्षों की संख्या है। इस प्रकार,

$$\text{साधारण ब्याज} = 500 \times \frac{5}{100} \times 2 \text{ रु०}$$

$$= 50 \text{ रु०}$$

यह 500 रु० पर 2 वर्षों का साधारण ब्याज है।

यदि हम प्रत्येक वर्ष का साधारण ब्याज अलग अलग ज्ञात करें, तो हमें निम्न प्राप्त होता है :

पहले वर्ष के अंत में साधारण ब्याज

$$= 500 \times \frac{5}{100} \times 1 \text{ रु०}$$

$$= 25 \text{ रु०}$$

इसी प्रकार, दूसरे वर्ष के अंत में साधारण ब्याज

$$= 500 \times \frac{5}{100} \times 1 \text{ रु०}$$

$$= 25 \text{ रु०}$$

इस प्रकार, दोनों वर्षों का कुल साधारण ब्याज 50 रु० होगा।

स्पष्ट है कि दोनों वर्षों में मूलधन समान अर्थात् 500 रु० रहा। अब उस स्थिति पर विचार कीजिए जब पहले वर्ष के अंत में साधारण ब्याज को मूलधन में जोड़ दिया जाए। यह पहले वर्ष के अंत में **मिश्रधन (amount)** होगा। इस उदाहरण में पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन 500 रु० + 25 रु० = 525 रु० होगा।

यदि हम इस राशि को दूसरे वर्ष के लिए मूलधन मानें, तो हमें निम्न प्राप्त होगा :

दूसरे वर्ष के अंत में साधारण ब्याज

$$= 525 \times \frac{5}{100} \times 1 \text{ रु०}$$

$$= 26.25 \text{ रु०}$$

यदि हम दोनों वर्षों के साधारण ब्याज को जोड़ें तो हमें 500 रु० पर जो ब्याज प्राप्त होगा उसे हम **500 रु० पर दो वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज (compound interest)** कहेंगे। इस प्रकार 25 रु० + 26.25 रु० = 51.25 रु०, 500 रु० पर दो वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज है। वैकल्पिक रूप से, दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन ज्ञात करके उसमें से प्रारम्भिक मूलधन 500 रु० घटाकर भी चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात किया जा सकता है। इस प्रकार, (525 रु० + 26.25 रु०) —500 रु० = 51.25 रु०।

ध्यान दीजिए कि 500 रु० पर 2 वर्ष का साधारण ब्याज 50 रु० था जबकि चक्रवृद्धि ब्याज 51.25 रु० है। यह अंतर इस कारण है, क्योंकि चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में हमने पहले वर्ष का साधारण ब्याज, 25 रु० मूलधन 500 रु० में जोड़ा था और दूसरे वर्ष के लिए मूलधन 525 रु० माना था।

(पाठक को चाहिए कि वह जाँच करे कि चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर, 1.25 रु० पहले वर्ष के साधारण ब्याज, 25 रु० पर साधारण ब्याज है।)

इसी प्रकार की प्रक्रिया किसी दी हुई राशि पर दो से अधिक वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने में भी प्रयुक्त की जा सकती है। दूसरे शब्दों में, हम **हर बार ब्याज को मूलधन में जोड़ देते हैं तथा इस प्रकार प्राप्त राशि को अगले वर्ष के लिए मूलधन मान लेते हैं।**

अगली कक्षाओं में आप एक दी हुई राशि पर दिए हुए वर्षों के लिए चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने का एक सूत्र सीखेंगे।

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त उदाहरण में ब्याज वार्षिक आधार पर परिकलित किया गया था। इसके लिए कभी-कभी यह कहा जाता है कि ब्याज प्रति वर्ष

संयोजित (**compounded annually**) किया जाता है। परन्तु यह आवश्यक नहीं कि ब्याज सदा प्रति वर्ष संयोजित किया जाए। यह भी हो सकता है कि ब्याज वर्ष में दो बार अर्थात् प्रत्येक छः मास के पश्चात संयोजित किया जाए जैसा कि प्रायः बैंकों में होता है। इसके लिए यह कहा जाता है कि ब्याज **प्रति छमाई संयोजित (compounded half-yearly)** होता है। इसी प्रकार, यदि ब्याज वर्ष में चार बार अर्थात् प्रत्येक तीन मास पश्चात संयोजित किया जाता है, तो इसके लिए यह कहा जाता है कि ब्याज **प्रति तिमाही संयोजित (compounded quarterly)** होता है।

समय का वह अंतराल जिसके पश्चात चक्रवृद्धि ब्याज संयोजित किया जाता है **रूपांतरण अवधि (conversion period)** कहलाती है। उपरोक्त उदाहरण में रूपांतरण अवधि 1 वर्ष है और रूपांतरण अवधियों की संख्या 2 है, क्योंकि राशि 2 वर्ष के लिए उधार ली गई थी। यदि इस उदाहरण में ब्याज प्रति छमाही संयोजित किया जाता, तो **छः छः मास** की इन रूपांतरण अवधियों की संख्या **चार** होती।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : 850 रु० पर 2 वर्ष के लिए 4% वार्षिक दर पर चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, यदि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित किया जाता है।

हल : क्योंकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित किया जाता है, अतः एक एक वर्ष की रूपांतरण अवधियों को संख्या 2 होगी। इस प्रकार,
पहली रूपांतरण अवधि के अंत में ब्याज

$$= 850 \times \frac{4}{100} \times 1 \text{ रु०}$$

$$= 34 \text{ रु०}$$

अतः, मिश्रधन $= 850$ रु० $+ 34$ रु०

$$= 884 \text{ रु०}$$

स्पष्ट है कि यह दूसरी रूपांतरण अवधि के लिए मूलधन होगा।

अतः, दूसरी रूपांतरण अवधि के अंत में ब्याज

$$= 884 \times \frac{4}{100} \times 1 \text{ रु०}$$

$$= \frac{3536}{100} \text{ रु०}$$

$$= 35.36 \text{ रु०}$$

अतः, चक्रवृद्धि ब्याज

$$= 34 \text{ रु०} + 35.36 \text{ रु०}$$

$$= 69.36 \text{ रु०}$$

उदाहरण 2 : 400 रु० पर $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 10% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, यदि ब्याज प्रति छमाही संयोजित किया जाता है।

हल : क्योंकि ब्याज प्रति छमाही संयोजित किया जाता है, अतः छः छः मास की रूपांतरण अवधियों की संख्या 3 होगी। प्रत्येक रूपांतरण अवधि के लिए ब्याज की दर $\frac{1}{2}(10\%) = 5\%$ होगी। (क्यों ?)

अब, पहली रूपांतरण अवधि के अंत में ब्याज

$$= 400 \times \frac{5}{100} \times 1 \text{ रु०}$$

$$= 20 \text{ रु०}$$

अतः, मिश्रधन $= 400$ रु० $+ 20$ रु०

$$= 420 \text{ रु०}$$

दूसरी रूपांतरण अवधि के अंत में ब्याज

$$= 420 \times \frac{5}{100} \times 1 \text{ रु०}$$

$$= 21 \text{ रु०}$$

अतः, मिश्रधन $= 420$ रु० $+ 21$ रु०

$$= 441 \text{ रु०}$$

तीसरी रूपांतरण अवधि के अंत में ब्याज

$$=441 \times \frac{5}{100} \times 1 \text{ रु०}$$

$$=22.05 \text{ रु०}$$

अतः, चक्रवृद्धि ब्याज $=20$ रु० $+21$ रु० $+22.05$ रु०

$$=63.05 \text{ रु०}$$

उदाहरण 3 : 10000 रु० पर 8% वार्षिक दर से एक वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज क्या होगा, यदि ब्याज प्रति तिमाही संयोजित किया जाता है ?

हल : स्पष्ट है कि तीन तीन मास की 4 रूपांतरण अवधियाँ होंगी और प्रत्येक रूपांतरण अवधि के लिए ब्याज की दर $\frac{1}{4}(8\%)=2\%$ होगी। (क्यों ?) इस प्रकार, पहली रूपांतरण अवधि के अंत में ब्याज

$$=10000 \times \frac{2}{100} \times 1 \text{ रु०} = 200 \text{ रु०}$$

अतः, मिश्रधन $=10000$ रु० $+200$ रु० $=10200$ रु०

दूसरी रूपांतरण अवधि के अंत में ब्याज

$$=10200 \times \frac{2}{100} \times 1 \text{ रु०}$$

$$=204 \text{ रु०}$$

अतः, मिश्रधन $=10200$ रु० $+204$ रु०

$$=10404 \text{ रु०}$$

तीसरी रूपांतरण अवधि के अंत में ब्याज

$$=10404 \times \frac{2}{100} \times 1 \text{ रु०}$$

$$=208.08 \text{ रु०}$$

अतः, मिश्रधन $=10404$ रु० $+208.08$ रु०

$$=10612.08 \text{ रु०}$$

चौथी रूपांतरण अवधि के अंत में ब्याज

$$= 10612.08 \times \frac{2}{100} \times 1 \text{ रु०}$$

$$= 212.24 \text{ रु० (लगभग)}$$

अत: चक्रवृद्धि ब्याज

$$= 200.00 \text{ रु०} + 204.00 \text{ रु०} + 208.08 \text{ रु०} + 212.24 \text{ रु०}$$

$$= 824.32 \text{ रु० (लगभग)}$$

उदाहरण 4 : 4% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर एक राशि एक वर्ष के अंत में 10404 रु० हो जाती है जबकि ब्याज प्रति छमाही संयोजित होता है। जमा की गई राशि ज्ञात कीजिए।

हल : आइए मान लें कि जमा की गई राशि 100 रु० थी। क्योंकि ब्याज प्रति छमाही संयोजित किया जाता है, अत: एक वर्ष में दो रूपांतरण अवधियाँ होंगी तथा प्रत्येक रूपांतरण अवधि में ब्याज की दर $\frac{1}{2}$ (4%) = 2% होगी।

अब, पहली रूपांतरण अवधि के अंत में ब्याज

$$= 100 \times \frac{2}{100} \times 1 \text{ रु०} = 2 \text{ रु०}$$

$$\text{मिश्रधन} = 100 \text{ रु०} + 2 \text{ रु०}$$

$$= 102 \text{ रु०}$$

दूसरी रूपांतरण अवधि के अंत में ब्याज

$$= 102 \times \frac{2}{100} \times 1 \text{ रु०}$$

$$= 2.04 \text{ रु०}$$

$$\text{मिश्रधन} = 102 \text{ रु०} + 2.04 \text{ रु०}$$

$$= 104.04 \text{ रु०}$$

अब, यदि मिश्रधन 104.04 रु० है, तो जमा की गई राशि = 100 रु०

अत: यदि मिश्रधन 1 रु० है तो जमा की गई राशि

$$= \frac{100}{104.04} \text{ रु०}$$

और यदि मिश्रधन 10404 रु० है, तो जमा की गई राशि

$$= \frac{100}{104.04} \times 10404 \text{ रु०}$$

$$= 10000 \text{ रु०}$$

प्रश्नावली 15.5

1. दो वर्ष के अंत में कितनी राशि देय होगी यदि 1000 रु० 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लिए जाएँ, और ब्याज प्रति वर्ष संयोजित किया जाता हो ?
2. 850 रु० पर 4% वार्षिक दर पर 1 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए यदि ब्याज प्रति छमाही संयोजित किया जाता है।
3. 1800 रु० की राशि पर 4% वार्षिक दर से 2 वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर ज्ञात कीजिए।
4. मैंने एक मित्र से साधारण ब्याज की 6% वार्षिक दर पर 2 वर्ष के लिए 1200 रु० उधार लिए। यदि साधारण ब्याज की अपेक्षा वह 6% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज लेता, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित हो, तो मुझे उसे कितनी रकम अधिक देनी पड़ती ?
5. रमेश ने 700 रु० 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर 3 वर्ष के लिए उधार दिए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित किया जाता है। 3 वर्ष के पश्चात उसे कितनी राशि प्राप्त होगी ?

कुछ महत्वपूर्ण सूत्र

[कोष्ठकों में दी गई संख्याएँ पृष्ठ संख्याओं को दर्शाती हैं। सभी अक्षरों के सामान्य अर्थ हैं।]

$b^m \times b^n = b^{m+n}$ (33)

$\dfrac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ (33)

$(b^m)^n = b^{mn}$ (36)

$(b^m)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{m}{n}}$ (37)

$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ (40)

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ (75)

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ (77)

$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$ (78)

$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$ (79)

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ (82)

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$
$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (86)

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$ (222)

चाप की लम्बाई $= \dfrac{m\pi r}{180}$ (222)

त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (229)

वृत्त का क्षेत्रफल $=\pi r^2$ (240)

घनाभ का आयतन $=l\times b\times h$ (247)

घन का आयतन $=l^3$ (248)

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2(l\times b+b\times h+h\times l)$ (249)

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $=6a^2$ (249)

बेलन का आयतन $=\pi r^2h$ (253)

बेलन का वक्र पृष्ठ $=2\pi rh$ (254)

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=2\pi r(r+h)$ (254)

शंकु का आयतन $=\frac{1}{3}\pi r^2h$ (256)

शंकु का वक्र पृष्ठ $=\pi rl$ (256)

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $=\pi r(l+r)$ (256)

गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r^3$ (257)

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $=4\pi r^2$ (257)

Syllabus for Class VIII

UNIT I : REAL NUMBERS

The fact that $\sqrt{2}$ is not rational (proof to be supplied): the need and concept of irrational numbers; expression of $\sqrt{2}$ as non-terminating, non-recurring decimal; existence of other irrational numbers (simple examples only, such as $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, etc, without proof); the fundamental operations on irrational numbers; simplification of expressions involving irrational numbers; approximate evaluation of irrational numbers; concept of a real number; real number line.

UNIT II : EXPONENTS AND RADICALS

General concept of the power of a $(a>o)$; laws of exponents: proofs for integers, statements in case of rationals; simplification of radicals.

UNIT III : ALGEBRAIC EXPRESSIONS

Review of the material in class VII; polynomials with real coefficients, their addition, subtraction, multiplication and division; rational expressions, their addition, subtraction, multiplication and division (simple cases).

UNIT IV : SPECIAL PRODUCTS AND FACTORS

Cube of a binomial; review of factoring techniques covered in class VII; factoring sum and difference of two cubes; factoring binomials and trinomials reducible to above forms. Examples of conditional identities may also be given.

UNIT V : LINEAR EQUATIONS AND INEQUATIONS

Graphs of first degree equations in one and two variables and inequations in one variable; simultaneous linear equations in two variables and their solution by (i) graphing (ii) elimination by addition and subtraction and (iii) elimination by substitution.

UNIT VI : USE OF TABLES

Use of tables in computing squares, cubes, square roots and cube roots of natural numbers; use of interest tables.

UNIT VII : SETS

Sets and set notation; ways of describing a set; finite and infinite sets; the empty set; equality of sets; sub-sets; universal set; set operations—union and intersection and their properties; disjoint sets; Venn diagrams.

UNIT VIII : CONGRUENCE OF TRIANGLES

Review of the work done in class VII; numbers of ways in which two triangles can be congruent; congruence of a triangle to itself.

UNIT IX : PARALLEL LINES AND SIMILARITY

Review of the work done in previous classes; ratio and proportion: intercepts on a transversal by parallel lines;

equal intercepts and proportional intercepts properties and their use in obtaining some results on triangles and doing the following constructions :

(i) To divide a line-segment into a given number of equal segments.

(ii) To divide a line-segment into a given number of segments in a given ratio.

Similarity of triangles; AAA, SSS and SAS similarity rules.

UNIT X : CIRCLES

Review of the work done in previous classes; intersection of a circle and a line; secant, tangent and point of tangency; number of tangents to a circle from a point; construction of tangents :

(i) at a given point on it.

(ii) from a point outside it.

Intersection of two circles; common chord and common tangent; degree measure of an arc and its properties; circumference of a circle and its relationship to the diameter; the number π.

UNIT XI : AREAS

Review of the work done in class VII; Hero's formula for area of a triangle; area of a quadrilateral; areas of irregular rectilinear figures—field method, triangulation method; area of a regular polygon; area of a circle; measurement of area by method of counting squares.

UNIT XII : VOLUMES AND SURFACE AREAS

Concept of volume, standard unit of volume; formulae for volumes and surface areas of cuboids, cubes, right circular cylinders, right circular cones and spheres.

UNIT XIII : RAW DATA AND THEIR ARITHMETIC MEAN

Collection of data; range; calculation of mean of raw data.

UNIT XIV : FREQUENCY DISTRIBUTIONS AND HISTOGRAMS

Frequency distributions (ungrouped data): use of tally marks; calculation of mean of ungrouped frequency distributions; mode of raw data; grouping of data; graphical representation of frequency distributions—histograms.

UNIT XV : ARITHMETIC IN DAILY LIFE

Revision of some of the topics such as profit and loss, simple interest, time and work, time and distance, direct and indirect variation at a somewhat higher level than class VII; introduction of compound interest.

उत्तरमाला

प्रश्नावली 8.1

1. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) हाँ (v) हाँ (vi) नहीं (vii) नहीं (viii) हाँ (ix) नहीं
2. (i) हाँ (ii) हाँ 3. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ
4. (i) हाँ (ii) हाँ 5. (i) हाँ (ii) हाँ 6. (i) हाँ (ii) हाँ 7. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ 8. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ 9. AB = ED, BC = DF, CA = FE, $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle D$ और $\angle C = \angle F$
10. (i), (iii) और (iv) 11. हाँ

प्रश्नावली 9.1

1. छः; $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{5}$
2. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{1}$ (iv) $\frac{2}{1}$
3. (i) $\frac{1}{1}$ (ii) $\frac{1}{1}$ (iii) $\frac{1}{1}$
6. हाँ

प्रश्नावली 9.2

1. हाँ 2. हाँ 3. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ (iv) हाँ
4. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ
5. हाँ 6. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ (iv) हाँ

प्रश्नावली 9.3

1. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ (iv) हाँ (v) नहीं (vi) हाँ 2. (i) हाँ (ii) हाँ
3. (i) हाँ (ii) हाँ 4. (i) हाँ (ii) हाँ 5. (i) हाँ (ii) हाँ
6. DE=10, DF=12 7. 15 8. 3

प्रश्नावली 10.1

1. (i) जब केन्द्र से इसकी दूरी त्रिज्या से अधिक है।
 (ii) जब केन्द्र से इसकी दूरी त्रिज्या के समान है।
 (iii) जब केन्द्र से इसकी दूरी त्रिज्या से कम है।
2. (i) जब यह वृत्त को दो बिन्दुओं में काटती है।
 (ii) जब यह वृत्त को एक बिन्दु पर काटती है, नहीं
3. हाँ 4. हाँ 6. हाँ 8. हाँ

प्रश्नावली 10.2

1. (i) नहीं काटते (ii) काटते हैं (iii) स्पर्श करते हैं (iv) काटते हैं (v) स्पर्श करते हैं (vi) नहीं काटते (vii) संपाती हैं (viii) नहीं काटते (ix) काटते हैं (x) नहीं काटते
3. हाँ

प्रश्नावली 10.3

1. (i) 90 (ii) 270 (iii) 180 (iv) 180 2. 120, 240
3. (i) 288, 72 (ii) 300, 60 4. (i) $\frac{176}{7}$ सें॰मी॰ (ii) 44 सें॰मी॰ (iii) 88 मी॰

(iv) $\frac{88}{7}$ कि० मी०

5. (i) $\frac{35}{4}$ सें० मी० (ii) $\frac{175}{11}$ सें० मी० (iii) $\frac{21}{20}$ मी० (iv) $\frac{553}{400}$ मी०

6. $\frac{281600}{7}$ कि०मी० 7. (i) $\frac{11}{12}$ सें०मी० (ii) $\frac{11}{6}$ सें०मी० (iii) $\frac{11}{3}$ सें०मी०

(iv) $\frac{22}{5}$ सें०मी० (v) $\frac{11}{2}$ सें०मी० (vi) $\frac{55}{8}$ सें०मी०

प्रश्नावली 11.1

1. (i) 16.81 वर्ग सें० मी० (ii) 43.56 वर्ग सें० मी०
2. (i) 5.5 सें०मी० (ii) 6.4 मी० 3. (i) 22.6875 वर्ग मी०
(ii) 121 वर्ग मी० 4. (i) 40 सें०मी० (ii) 28 मी० 5. 30 मीट्रिक टन

6. $\frac{4000}{9}$ वर्ग मी०, $\frac{800}{27}$ मी० 7. (i) $\frac{2457}{200}$ वर्ग सें०मी० (ii) $\frac{186327}{40}$ वर्ग मी०

8. (i) 51.25 वर्ग सें०मी० (ii) 172.22835 वर्ग सें०मी० (iii) 49.02 वर्ग मी०
(iv) 31458 वर्ग मि० मी० 9. (i) 27 वर्ग सें० मी० (ii) 32 वर्ग सें० मी०
10. 49 वर्ग सें०मी० 11. 2 सें०मी० 12. 280.80 रु०

प्रश्नावली 11.2

1. (i) $6\sqrt{6}$ वर्ग सें० मी० (ii) $12\sqrt{5}$ वर्ग सें० मी० (iii) 12.2346 वर्ग मी०
(iv) 9713.256 वर्ग मि०मी० 2. 1611 वर्ग मी०

3. $(48+5\sqrt{119}+12\sqrt{7})$ वर्ग मी० 4. $\left(8\sqrt{5}+\frac{\sqrt{3135}}{4}\right)$ वर्ग सें० मी०

5. 24.5 वर्ग सें०मी० 6. 15100 वर्ग मी० 7. $\frac{49}{4}\sqrt{3}$ वर्ग सें०मी० 8. 1050 वर्ग मी०

प्रश्नावली 11.3

1. (i) 38.5 वर्ग सें० मी० (ii) 55.44 वर्ग सें० मी० (iii) 186.34 वर्ग सें० मी०
2. 9 : 4 3. वृत्त 4. त्रिज्याएँ—7 सें० मी० और 17.5 सें० मी०, क्षेत्रफल—154 वर्ग सें० मी० और 962.5 वर्ग सें० मी०

प्रश्नावली 12.1

1. (i) 1681996800 घन मि० मी, 10289420 वर्ग मि० मी० (ii) 960 घन सें० मीं०, 592 वर्ग सें० मी० (iii) 1760.22 घन सें० मी०, 909.66 वर्ग सें० मी० (iv) 445.295 घन मी०, 462.54 वर्ग मी० (v) 5040000 घन सें० मी०, 268600 वर्ग सें० मी०
2. (i) $\frac{27}{8}$ घन सें० मी०, $\frac{27}{2}$ वर्ग सें० मी० (ii) 1953.125 घन सें० मी०, 937.50 वर्ग सें० मी० (iii) 17576000 घन सें० मी०, 405600 वर्ग सें० मी० (iv) 5088448 घन सें० मी०, 177504 वर्ग सें० मी०
3. 30301 घन सें० मी०, 1206 वर्ग सें० मी०
4. (i) आयतन आठ गुना हो जाता है, पृष्ठीय क्षेत्रफल चार गुना हो जाता है।
   (ii) आयतन $\frac{1}{8}$ गुना हो जाता है, पृष्ठीय क्षेत्रफल $\frac{1}{4}$ गुना हो जाता है
5. 7488 ग्रा० 6. 80 सें०मी० 7. 1456 वर्ग सें०मी० 8. 650 वर्ग मी०
9. 62.325 वर्ग मी० 10. 8 सें० मी०, 16 सें० मी०, 24 सें०मी०

प्रश्नावली 12.2

1. (i) $\frac{159489}{140}$ घन सें० मी०, $\frac{17721}{35}$ वर्ग सें० मी०, $\frac{3168}{5}$ वर्ग सें० मी०
   (ii) $\frac{539}{1000}$ घन मी०, $\frac{77}{25}$ वर्ग मी०, $\frac{77}{20}$ वर्ग मी०
   (iii) 2236080 घन मि० मी०, 58080 वर्ग मि०मी०, 95348 वर्ग मि०मी०
2. (i) 1232000 घन मि० मी०, 70400 वर्ग मि० मी०
   (ii) 1617 घन सें० मी०, 924 वर्ग सें० मी०
   (iii) 17248 घन मी०, 5544 वर्ग मी०

3. (i) $\frac{275968}{375}$ घन सें० मी०, 392.24 वर्ग सें० मी०

(ii) $\frac{717409}{375}$ घन मी०, 745.36 वर्ग मी०

(iii) $\frac{4312}{3}$ घन मी०, 616 वर्ग मी० 4. 204.1 वर्ग सें०मी०

5. अनुपात 1 : 16 6. 288 π घन सें०मी० 7. 4840 वर्ग सें० मी०

8. $\frac{23068672000000}{21}$ घन कि० मी०, $\frac{3604480000}{7}$ वर्ग कि०मी०

9. 10 मी० 10. 37.68 घन मी०, 47.1 वर्ग मी० 11. 1331 : 1

12. (i) 8 गुना हो जाता है, 4 गुना हो जाता है

(ii) $\frac{1}{8}$ गुना हो जाता है, $\frac{1}{4}$ गुना हो जाता है

14. 249.48 वर्ग सें० मी० 15. 204.1 वर्ग मी०, 314 घन मी०,

16. 4.2 सें० मी०

प्रश्नावली 13.1

2. (i) 33 (ii) 82 (iii) हां 3. (i) 156 सें०मी० (ii) 128 सें० मी० (iii) 11 (iv) 142 सें०मी० (v) 7 4. (i) 7 वां दिन, पहला दिन (ii) 10.0 (iii) 25.25 °C 5. (i) 1.2 मि०मी० 6. 15 7. 4.1 कि०ग्रा० कम होगा 8. (i) 27 मिनट (ii) 7 विद्यार्थी (iii) 26 मिनट

प्रश्नावली 14.1

3. (ii) 165—170 5. (ii) 50—60

प्रश्नावली 15.1

1. 25 प्रतिशत 2. 89 रु० 3. 60 रु० प्रति कम्बल 4. 400 रु०, 20 रु०
5. 23000 रु० 6. 25 प्रतिशत 7. 20 प्रतिशत 8. 25 रु० हानि 9. 25 प्रतिशत
10. 840 रु०

प्रश्नावली 15.2

1. 10 वर्ष 2. 5000 रु० 3. 720 रु० 4. 4 प्रतिशत 5. (i) 48 रु०
(ii) 1000 रु० (iii) 4.5 प्रतिशत (iv) $12\frac{1}{2}$ वर्ष (v) 12000 रु०
6. 450 रु० 7. 5 प्रतिशत 8. 780 रु० 9. 700 रु० प्रत्येक
10. 20 वर्ष 11. 817.50 रु०, 881.25 रु०

प्रश्नावली 15.3

1. 15 दिन 2. 9 दिन 3. 2 दिन 4. 4 दिन 5. 6 दिन
6. 8 कि०मी० / घंटा 7. 65 कि०मी०/ घंटा; 8.24 प्रातः 8. 4.10 प्रातः
9. 2 मजदूर 10. 15 दिन 11. 1 घंटा 20 मिनट

प्रश्नावली 15.4

1. (i) 4 (ii) $\frac{75}{4}$ 2. (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{1}{14}$ 3. $\frac{4}{3}$, $\frac{15}{13}$
4. 5 5. 0 6. 12

प्रश्नावली 15.5

1. 1102.50 रु० 2. 34.34 रु० 3. 2.88 रु० 4. 4.32 रु०
5. 931.70 रु०

पारिभाषिक शब्दावली

अंकगणितीय माध्य	arithmetic mean
अंत: केन्द्र	incentre
अंत: कोण	interior angle
अंत: खंड	intercept
अंत: त्रिज्या	apothem
अक्ष	axis
अंतर्गत	inscribed
अनियमित ऋजुरेखीय आकृति	irregular rectilinear figure
अनुक्रमानुपात	direct variation
अनुपात	ratio
अभ्यंतर	interior
अर्धवृत्त	semicircle
अवर्गीकृत बारंबारता बंटन	ungrouped frequency distribution
अवयव	element
असमान	unequal
आँकड़े	data
आँकड़ों का वर्गीकरण	grouping of data
आकार	shape
आकृति	figure
आधार	base
आनुपातिक स्थिरांक	constant of proportionality
आयत	rectangle
आयतन	volume
आयतचित्र	histogram
आलेख	graph
आलेखीय निरूपण	graphical representation

इकाई/एकक/मात्रक	unit
इकाई की विधि	unitary method
उपपत्ति	proof
उपरि वर्ग सीमा	upper class boundary
उभयनिष्ठ जीवा	common chord
उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा	common tangent
ऊँचाई	height
ऋजुरेखीय	rectilinear
एकांतर कोण	alternate angles
औसत	average
कर्ण	hypotenuse
काम	work
किनारा	edge
केन्द्र	centre
केन्द्र रेखा	line of centres
केन्द्रीय कोण	central angle
कोण	angle
क्रय मूल्य	cost price
क्षेत्रफल	area
गणित	mathematics
गोला	sphere
घन	cube
घनाभ	cuboid
चक्रवृद्धि ब्याज	compound interest
चतुर्भुज	quadrilateral
चाप	arc
चाप का डिग्री माप	degree measure of an arc
चित्रालेख	pictograph
चिह्न	sign/symbol
चौड़ाई	breadth
छेदक	secant

जीवा	chord
ठोस	solid
डिग्री माप	degree measure
तदनुरूपी/संगत	corresponding
तापमान	temperature
त्रिभुज	triangle
त्रिभुजन की विधि	triangulation method
त्रिज्यखंड	sector
त्रिज्या	radius
तिर्यक ऊँचाई	slant height
तिर्यक रेखा	transversal
दक्षिणावर्त	clockwise
दण्ड आलेख	bar graph
दण्ड चार्ट	bar chart
दर	rate
दीर्घ चाप	major arc
दूरी	distance
निम्न वर्ग सीमा	lower class boundary
निरूपण	representation
न्यून कोण	acute angle
पार्श्वीय पृष्ठ	lateral surface
परिधि	circumference
परिमाण	magnitude
परिमाप	perimeter
परिवृत्त	circumcircle
परिशिष्ट	appendix
परिसर	range
पर्यवेक्षण/प्रेक्षण	observation
प्रतिच्छेदन	intersection
प्रतिच्छेद बिंदु	point of intersection
प्रति छमाही संयोजित	compounded semi-annually

प्रति तिमाही संयोजित	compounded quarterly
प्रति वर्ष संयोजित	compounded annually
प्रतिशत	per. cent
पृष्ठीय क्षेत्रफल	surface area
फलक	face
फील्ड विधि	field method
बराबर/समान	equal
ब्याज	interest
बहिर्भाग	exterior
बहुभुज	polygon
बहुलक	mode
बहुलक वर्ग	modal class
बारंबारता	frequency
बारंबारता बंटन	frequency distribution
बारंबारता सारणी	frequency table
बाह्य कोण	exterior angle
बिंदु	point
भिन्न	distinct
भुजा	side
मध्य-बिंदु	mid-point
माध्य	mean
माध्यक/माध्यिका	median
मापन	measurement
मिलान चिन्ह	tally marks
मिश्रधन	amount
मूलधन	principal
यथा प्राप्त आंकड़े	raw data
युग्म	pair
रचना	construction
रूपांतरण अवधि	conversion period
रेखा	line

रेखाखंड	line-segment
रेडियन	radian
लघु चाप	minor arc
लम्ब	perpendicular
लम्ब वृत्तीय बेलन	right circular cylinder
लम्ब वृत्तीय शंकु	right circular cone
लम्ब समद्विभाजक	perpendicular bisector
लम्बाई	length
लाभ	profit/gain
वक्र पृष्ठ	curved surface
वर्ग	square
वर्ग अंतराल	class interval
वर्ग साइज	class size
वर्गीकृत बारंबारता बंटन	grouped frequency distribution
वृत्त	circle
वृत्त-खंड	segment of a circle
वृत्तीय प्रणाली	circular system
व्यास	diameter
व्युत्क्रमानुपात	indirect variation
वामावर्त	anticlockwise
विक्रय मूल्य	selling price
विकर्ण	diagonal
विलोम	converse
शीर्ष कोण	vertical angle
शीर्षलम्ब	altitude
संकल्पना	concept
संगत कोण	corresponding angles
संग्रह	collection
संगामी	concurrent
संपाती	coincident
संपूरक	supplementary

समकोण	right angle
समचतुर्भुज	rhombus
समद्विबाहु	isosceles
समद्विभाजक	bisector
समदूरस्थ	equidistant
सम बहुभुज	regular polygon
समबाहु	equilateral
सम्पूर्ण पृष्ठ	whole surface
सम्मुख	opposite
समय	time
समानकोणिक	equiangular
समानुपात	proportion
समलम्ब	trapezium
सममिति	symmetry
समरूप	similar
समरूपता	similarity
समांतर	parallel
समांतर चतुर्भुज	parallelogram
सर्वांगसम	congruent
सर्वांगसमता	congruence
साइज़	size
साधारण ब्याज	simple interest
सीमा	boundary
सूत्र	formula
सैक्साजेसीमल पद्धति	sexagesimal system
स्पर्श बिंदु	point of contact
स्पर्श रेखा	tangent
स्पर्श रेखाखंड	tangent segments
हानि	loss
हीरो का सूत्र	Hero's formula